

1141/Arts
I Year Arts Examination, 2016

MATHEMATICS

Paper-I

(Algebra)

Time : Three Hours
Maximum Marks : 70

PART - A (खण्ड-अ) [Marks : 20]

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पचास शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - B (खण्ड-ब) [Marks : 30]

Answer *five* questions (250 words each).

Selecting *one* from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - C (खण्ड-स) [Marks : 20]

Answer any *two* questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - A

(खण्ड-अ)

1. Answer the following :

निम्न के उत्तर दीजिए :

UNIT - I

(इकाई-I)

(i) Define orthogonal matrix.

लाम्बिक मैट्रिक्स को परिभाषित कीजिये।

(ii) What is trace of a matrix ?

मैट्रिक्स की ट्रेस क्या है?

UNIT - II

(इकाई-II)

(iii) If α, β, γ are roots of the equation

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ then find the value of

$\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma$.

यदि समी. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ के मूल α, β, γ हों तो

$\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma$ का मान ज्ञात करो।

- (iv) If sum of two roots of the equation $x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$ is equal to zero then find its third root.

यदि समी. $x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$ के दो मूलों का योग शून्य है तो तीसरा मूल ज्ञात करो।

UNIT - III

(इकाई-III)

- (v) What is a group ? Define it.

समूह क्या है? परिभाषित कीजिए।

- (vi) What is order of an element of a group ?

ग्रुप के किसी अवयव की कोटि क्या होती है?

UNIT - IV

(इकाई-IV)

- (vii) Define subgroup ?

उपसमूह को परिभाषित कीजिए।

- (viii) If $G = (z, +)$ and $H = 2z = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ then write right cosets of H in G.

यदि $G = (z, +)$ हो तथा $H = 2z = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ हो तो H के G में दक्षिण सहसमुच्चय ज्ञात कीजिए।

UNIT - V

(इकाई-V)

(ix) What is isomorphism of groups ? Define.

समूहों की तूल्यकारिता क्या होती है? परिभाषित करो।

(x) What is kernel of homomorphism ?

समाकारिता की अष्टि क्या होती है?

PART - B

(खण्ड-ब)

UNIT - I

(इकाई-I)

2. Find the inverse of a matrix A.

मैट्रिक्स A की प्रतिलोम मैट्रिक्स ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

3. Apply matrix theory to solve the following system of equations:

मैट्रिक्स सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

UNIT - II

(इकाई-II)

4. Solve the equation $2x^3 - x^2 - 22x - 24 = 0$ two of the root being in the ratio 3 : 4.

समीकरण $2x^3 - x^2 - 22x - 24 = 0$ हल कीजिए। जबकि दो मूलों का अनुपात 3 : 4 है।

5. Solve the equation $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ by Cardan's method.

समीकरण को कार्डन विधि से हल कीजिए।

UNIT - III

(इकाई-III)

6. prove that the set of n , n^{th} roots of unity is a multiplicative finite abelian group.

n , n वें मूलों का समुच्चय गुणा के लिए परिमित आबेली समूह होता है।

7. If (यदि) $\sigma = (17 \ 26 \ 35 \ 84)$ and (और)

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ then prove that (सिद्ध$$

कीजिए)

$$\rho\sigma\rho^{-1} = \rho(1)\rho(7)\rho(2)\rho(6)\rho(3)\rho(5)\rho(8)\rho(4)$$

UNIT - IV

(इकाई-IV)

8. State and prove Lagrange's theorem.

लांग्राज प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

9. Prove that every quotient group of an abelian group is abelian but not conversely.

सिद्ध करो कि एक आबेली ग्रुप का प्रत्येक विभाग ग्रुप आबेली होता है किन्तु विलोम अनिवार्यतः सत्य नहीं है।

UNIT - V

(इकाई-V)

10. If f is a homomorphism from a group G to G' with kernel K , then prove that $K \triangleleft G$.

यदि f ग्रुप G से G' पर एक समाकारिता हो तो f की अष्टि $K \triangleleft G$ है, सिद्ध करो।

11. Prove that every group is isomorphic to some permutation group.

सिद्ध करो कि प्रत्येक ग्रुप एक क्रमचय समूह के तुल्यकारी होता है।

PART - C

(खण्ड-स)

UNIT - I

(इकाई-I)

12. Show that the following matrix A satisfies Cayley Hamilton theorem. hence find its inverse A^{-1} .

प्रदर्शित कीजिए कि निम्न मैट्रिक्स कैली A हैमिल्टन प्रमेय को संतुष्ट करती है। फलतः उसकी प्रतिलोम मैट्रिक्स A^{-1} ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

UNIT - II

(इकाई-II)

13. Solve the biquadratic equation.

चतुर्घात समीकरण को हल करो :

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$$

UNIT - III

(इकाई-III)

14. For any element a of a group G (एक ग्रुप G के किसी अवयव a के लिए) prove that (सिद्ध करो)

$$O(a) = O(x^{-1}ax), \forall x \in G$$

UNIT - IV

(इकाई-IV)

15. if a is an element of a group G , then prove that its normalizer $N(a)$ is a subgroup of G :

यदि a किसी समूह G का एक अवयव है तो सिद्ध कीजिए कि इसका प्रसामान्यक $N(a)$, G का एक उपसमूह है यदि

$$N(a) = \{x \in G / ax = xa\}$$

UNIT - V

(इकाई-V)

16. Prove that "Every homomorphic image of a group G is isomorphic to a some quotient group of G ."

सिद्ध करो "किसी ग्रुप G का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब, G के किसी विभाग ग्रुप के तुल्यकारी होता है।"