

Roll No. ....

Total Pages : 8

**1141**

**I Year (T.D.C.) Science Examination, 2016**

**MATHEMATICS**

(Algebra)

Paper-I

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 75

**PART-A ( खण्ड-अ )** [Marks : 20

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पचास शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART-B ( खण्ड-ब )** [Marks : 35

Answer **five** questions (250 words each), selecting **one** from each Unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई में से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

P. T. O.

**PART-C ( खण्ड-स )**

[Marks : 20

Answer any **two** questions (500 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 500 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART-A**

( खण्ड-अ )

1. (i) Define Nullity of a Matrix.

किसी मैट्रिक्स की शून्यता को परिभाषित कीजिए।

- (ii) State Cayley-Hamilton theorem.

केली-हेमिल्टन प्रमेय का कथन लिखिए।

- (iii) Define Reciprocal equation.

व्युत्क्रम समीकरण को परिभाषित कीजिए।

- (iv) What is Ferrar's method ?

फैरारी विधि क्या है?

- (v) State Cancellation law.

निरसन नियम का कथन लिखिए।

(vi) What do you mean by Order of an Element of a group ?

समूह के किसी अवयव की कोटि से आप क्या समझते हैं?

(vii) Define Right coset.

एक दक्षिण सहसमुच्चय को परिभाषित कीजिए।

(viii) State the Lagrange's theorem.

लाग्रान्ज प्रमेय का उल्लेख कीजिए।

(ix) Define Automorphism.

स्वाकारिता को परिभाषित कीजिए।

(x) Give the statement of Fundamental theorem on Morphism.

समाकारिता के मूल प्रमेय का कथन दीजिए।

### PART-B

( खण्ड-ब )

### UNIT-I

( इकाई-I )

2. Reduce the following matrix in the Normal form and find its Rank :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

निम्न मैट्रिक्स को अभिलम्ब रूप में समानीत कर इसकी कोटि ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Show that the following matrix A satisfies Cayley-Hamilton theorem. Hence find its inverse  $A^{-1}$ .

प्रदर्शित कीजिए कि निम्न मैट्रिक्स A केली-हेमिल्टन प्रमेय को सन्तुष्ट करती है। फलतः इसकी प्रतिलोम मैट्रिक्स  $A^{-1}$  ज्ञात कीजिए।

## UNIT-II

### ( इकाई-II )

4. Solve the equation  $27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$ , the roots being in G.P.

समीकरण  $27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$ , को हल कीजिए, जबकि मूल गु.श्रे. में है।

5. Solve the following equation by Cardon's method :

$$x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0.$$

निम्न समीकरण को कार्डन विधि से हल कीजिए :

$$x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0.$$

### UNIT-III

#### ( इकाई-III )

6. If  $G$  is finite semigroup such that for any  $a, b, c \in G$ :

(a)  $ab = ac \Rightarrow b = c$

(b)  $ba = ca \Rightarrow b = c$

then  $G$  is a group.

यदि किसी परिमित साभिसमूह  $G$  के किन्हीं  $a, b, c \in G$  के लिए :

(a)  $ab = ac \Rightarrow b = c$

(b)  $ba = ca \Rightarrow b = c$

तो  $G$  एक समूह है।

7. Express the following permutation as the product of disjoint cycles. Also find whether this permutation is even or odd :

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 8 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

निम्न क्रमचय को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए। यह भी ज्ञात कीजिए कि यह क्रमचय सम है या विषम :

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 8 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

## UNIT-IV

### ( इकाई-IV )

8. Prove that every subgroup of an Abelian group is a Normal subgroup.

सिद्ध कीजिए कि क्रमविनिमेय समूह का प्रत्येक उपसमूह एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

9. Show that every quotient group of a cyclic group is cyclic, but not conversely.

प्रदर्शित कीजिए कि एक चक्रीय समूह का प्रत्येक विभाग समूह भी चक्रीय होता है, किन्तु विलोम अनिवार्यतः सत्य नहीं है।

## UNIT-V

### ( इकाई-V )

10. If  $f$  is a homomorphism from a group  $G$  to  $G^1$  and if  $e$  and  $e^1$  be their respective identities, then show that :

(a)  $f(e) = e^1$

(b)  $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}, \forall a \in G.$

यदि  $f$  समूह  $G$  से  $G^1$  पर एक समाकारिता हो तथा  $e$  और  $e^1$  क्रमशः  $G$  से  $G^1$  में तत्समक हों, तो प्रदर्शित कीजिए कि :

(a)  $f(e) = e^1$

(b)  $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}, \forall a \in G.$

11. Prove that the relation of isomorphism " $\cong$ " in the set of all groups is an equivalence relation.

सिद्ध कीजिए कि समूहों के समुच्चय में तुल्याकारिता का सम्बन्ध " $\cong$ " एक तुल्यता सम्बन्ध होता है।

### PART-C

( खण्ड-स )

12. Apply Matrix theory to solve the following system of equations :

$$2x - y + 3z = 8$$

$$-x + 2y + z = 4$$

$$3x + y - 4z = 0.$$

मैट्रिक्स सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$2x - y + 3z = 8$$

$$-x + 2y + z = 4$$

$$3x + y - 4z = 0.$$

13. Solve by Ferrari's method :

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 24x + 15 = 0.$$

फैरारी विधि से हल कीजिए :

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 24x + 15 = 0.$$

14. Show that for any element  $a$  of a group  $G$  :

$$O(a) = O(x^{-1}ax), \forall x \in G.$$

प्रदर्शित कीजिए कि एक समूह  $G$  के किसी अवयव  $a$  के लिए :

$$O(a) = O(x^{-1}ax), \forall x \in G.$$

15. Prove that any two left cosets of a subgroup are either identical or disjoint.

सिद्ध कीजिए कि किसी उपसमूह के कोई दो वाम सहसमुच्चय या तो सर्वसम होते हैं या असंयुक्त।

16. Show that every group is homomorphic to its quotient group.

प्रदर्शित कीजिए कि प्रत्येक समूह अपने विभाग समूह के समाकारी होता है।