

Total Pages : 8

3142/Arts

B.A. (Third Year) EXAMINATION, 2016

MATHEMATICS

Paper-II

(Abstract Algebra)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 100

PART - A (खण्ड-अ) [Marks : 20

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पचास शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - B (खण्ड-ब) [Marks : 50

Answer *five* questions (250 words each).

Selecting *one* from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - C (खण्ड-स) [Marks : 30

Answer any *two* questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

3142/Arts/410

P.T.O.

PART - A

(खण्ड-अ)

UNIT - I

(इकाई-I)

1. (i) Define the following :

परिभाषा लिखिये :

- (a) Integral domain (पूर्णांकीय प्रान्त)
- (b) Division ring (विभाजन रिंग)
- (c) Field (क्षेत्र)
- (d) Ideal (गुणजावली)

(ii) Define zero divisors in a ring with example.

वलय में शून्य के भाजक कि परिभाषा व उदाहरण दें।

UNIT - II

(इकाई-II)

(iii) Define characteristic of a ring.

वलय का अभिलक्षण कि परिभाषा लिखिये :

$(Z_4, +_4 \times_4)$ का अभिलक्षण ज्ञात करें

$(Z_4, +_4 \times_4)$ find characteristic of given.

(iv) Define range of a ring homomorphism.

रिंग कि परास को परिभाषिता कीजिये ।

UNIT - III

(इकाई-III)

(v) Define vector space.

सदिश समष्टि कि परिभाषा लिखिये ।

(vi) Define linearly dependent and linearly independent.

एक घाततः व एकघाततः कि परिभाषा लिखिए ।

UNIT - IV

(इकाई-IV)

(vii) Define basis and dimension of a vector space.

एक सदिश समष्टि के आधार व विभा की परिभाषा लिखिये ।

(viii) Find the dimension of the subspace generated by the following vectors in R^4 .

R^4 में सदिश सदिशों द्वारा जनित उपसमष्टि की विमा ज्ञात करो ।

(2,1,4,3) (2,1,2,0) (0,0,2,3) and (4,2,6,3)

UNIT - V

(इकाई-V)

(ix) Define Rank and Nullity of a linear transformation.

रैखिक रूपान्तरण की कोटि तथा शून्यता की परिभाषा लिखें ।

(x) Define sylvester's law of Nullity.

सिल्वेस्टर का शून्यता का नियम लिखिए ।

PART - B

(खण्ड-ब)

UNIT - I

(इकाई-I)

2. Ring $(Z_p = \{0,1,2,\dots,(p-1)\}, +_p, \times_p)$ is integral domain iff P is prime.

वलय $(Z_p = \{0,1,2,\dots,(p-1)\}, +_p, \times_p)$ एक पूर्णाकीय प्रान्त होता है यदिदि P अभाज्य है।

3. Every field is necessarily an integral domain but the converse is not necessarily true.

प्रत्येक क्षेत्र अनिवार्यतः प्रान्त होता है परन्तु इसका विलोम सदैव सत्य नहीं होता है।

UNIT - II

(इकाई-II)

4. Find the quotient ring R/I where $I = \{4n \mid n \in Z\}$ and $R = (Z, +, \times)$.

विभाग वलय R/I ज्ञात कीजिये जहाँ $I = \{4n \mid n \in Z\}$ तथा $R = (Z, +, \times)$ है।

5. A commutative ring without zero divisors can be embedded into field.

किसी शून्य के भाजकों से रहित क्रम विनिमेय वलय का एक फील्ड में अन्तर्स्थापन किया जा सकता है।

UNIT - III

(इकाई-III)

6. Prove that the set $W = \{(a, b, 0) \mid a, b \in F\}$ is a subspace of the vector space $V_3(F)$.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $W = \{(a, b, 0) \mid a, b \in F\}$ सदिश सदिश समष्टि $V_3(F)$ की एक उप समष्टि है।

7. The intersection of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space.

किसी सदिश समष्टि $V(F)$ को दो उप समष्टियों W_1 व W_2 का सर्वनिष्ठ भी $V(F)$ की एक उप समष्टि होती है।

UNIT - IV

(इकाई-IV)

8. Prove that the set $S = \{(1, 2, 1) (2, 1, 0) (1, -1, 2)\}$ forms a basis of the vector space $V_3(\mathbb{R})$.

सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $S = \{(1, 2, 1) (2, 1, 0) (1, -1, 2)\}$ सदिश समष्टि $V_3(\mathbb{R})$ का एक आधार बनाता है।

9. Show that the dimensions of the vector space $V(\mathbb{R})$ of all 2×2 real matrices is 4.

सिद्ध कीजिये कि 2×2 क्रम के सभी वास्तविक मैट्रिक्स के सदिश समष्टि $V(\mathbb{R})$ की विमा 4 हैं।

UNIT - V

(इकाई-V)

10. Show that the mapping $T : V_3(\mathbb{R}) \rightarrow V_2(\mathbb{R})$ where $T(a, b, c) = (c, a + b)$ is linear mapping.

सिद्ध कीजिये कि प्रतिचित्रण $T : V_3(\mathbb{R}) \rightarrow V_2(\mathbb{R})$ जहाँ $T(a, b, c) = (c, a + b)$ एक रैखिक प्रतिचित्रण है।

11. Find the matrix of linear transformation t relative to their standard basis where t is defined as :

रैखिक रूपान्तरण t की उनके मानक आधार के सापेक्ष मैट्रिक्स ज्ञात कीजिए जहाँ t निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$t : V_2 \rightarrow V_3 \text{ such that } t(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 2a_1 - a_2, 7a_2)$$

PART - C

(खण्ड-स)

UNIT - I

(इकाई-I)

12. If I is an ideal of a ring R then the set $R/I = \{I + a \mid a \in R\}$ is a ring for addition and multiplication defined as follows :

यदि I किसी वलय R के एक गुणजावली हो तो समुच्चय $R/I = \{I + a \mid a \in R\}$ निम्न प्रकार परिभाषित योग एवं गुणन संक्रियाओं के लिये एक वलय होता है।

$$(I + a) + (I + b) = I + (a + b)$$

$$(I + a) \cdot (I + b) = I + (ab), (I + a), (I + b) \in R/I$$

UNIT - II

(इकाई-II)

13. State all three theorem of isomorphism and prove second isomorphism theorem of Rina.

समाकारिता के तीनों प्रमेयों को परिभाषित करके (वलय) समाकारिता के द्वितीय प्रमेय को सिद्ध कीजिये।

UNIT - III

(इकाई-III)

14. The necessary and sufficient condition for a non void subset W of a vector space $V(F)$ to be subspace of $V(F)$ is :

किसी सदिश समष्टि $V(F)$ के एक अरिक्त उपसमुच्चय W के लिये $V(F)$

की एक उपसमष्टि होने के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है :

$$a, b \in F \text{ and } \alpha, \beta \in W \Rightarrow (a\alpha + b\beta) \in W$$

UNIT - IV

(इकाई-IV)

15. If W_1 and W_2 are two subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$ then.

यदि W_1 और W_2 एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उप समष्टियाँ हो तो

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

UNIT - V

(इकाई-V)

16. If the matrix of the linear transformation T on $V_2(\mathbb{R})$ relative

to the standard basis of $V_2(\mathbb{R})$ is $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, then what is the

matrix of T relative to the basis $B_1 = \{(1, 1) (1, -1)\}$?

यदि $V_2(\mathbb{R})$ के मानक आधार के सापेक्ष रेखिक रूपान्तरण T की मैट्रिक्स

$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ हो तो आधार $B_1 = \{(1, 1) (1, -1)\}$ के सापेक्ष T की मैट्रिक्स

क्या है?