

3141/Sc.

III Year (T.D.C.) Science Examination, 2017

MATHEMATICS

Paper-I

(Real Analysis)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 75

PART - A (खण्ड-अ) [Marks : 20

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पचास शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - B (खण्ड-ब) [Marks : 35

Answer *five* questions (250 words each).

Selecting *one* from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - C (खण्ड-स) [Marks : 20

Answer any *two* questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - A

(खण्ड-अ)

UNIT - I

(इकाई-I)

1. (i) Define bounded set.
परिबद्ध समुच्चय को परिभाषित कीजिए।
- (ii) State Bolzano-Weierstrass theorem.
बॉलजानो वाईस्ट्रास प्रमेय का प्रकथन लिखिए।

UNIT - II

(इकाई-II)

- (iii) Discuss the convergence and divergence criterion for hyper-harmonic series.
हाइपर-हारमोनिक श्रेणी के अपसारी एवं अभिसारी होने की विवेचना कीजिए।
- (iv) Discuss the Leibnitz's test for alternating series.
एकान्तर श्रेणी के लिए लेबनीज का परीक्षण की विवेचना कीजिए।

UNIT - III

(इकाई-III)

- (v) What do you mean by upper and lower darbox sum.
उपरि व निम्न डारबू योग से आप क्या समझते हैं?
- (vi) State the fundamental theorem of integral calculus.
समाकलन गणित का मूल प्रमेय का प्रकथन लिखिए।

UNIT - IV

(इकाई-IV)

- (vii) Define periodic function.
आवर्ती फलन को परिभाषित कीजिए।
- (viii) Write down the formulae of Fourier coefficients a_0 , a_n and b_n .
फूरिये गुणांक a_0 , a_n तथा b_n का सूत्र लिखिए।

UNIT - V

(इकाई-V)

- (ix) Write the statement of Abel's test for convergence of improper integrals.

आबेल परीक्षण का अनन्त समाकलन के अभिसरण के लिए कथन लिखिए।

- (x) Define absolute and conditional convergence of improper integral.

अनन्त समाकल के निरपेक्ष तथा सापेक्ष अभिसरण को परिभाषित कीजिए।

PART - B

(खण्ड-ब)

UNIT - I

(इकाई-I)

2. If x and y are elements of an ordered field then show that

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy.$$

यदि x, y क्रमित क्षेत्र F के दो अवयव हों तो सिद्ध करिए कि

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy.$$

3. Prove that Cantor set is uncountable.

सिद्ध कीजिए कि केन्टर समुच्चय अगणनीय है।

UNIT - II

(इकाई-II)

4. Prove that the sequence $\left\{n^{1/n}\right\}$ converges to 1.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\left\{n^{1/n}\right\}$, 1 को अभिसृत होती है।

5. Test the convergence of the following series :

$$\left(\frac{2^2}{1^2} - \frac{2}{1}\right)^{-1} + \left(\frac{3^3}{2^3} - \frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{4^4}{3^4} - \frac{4}{3}\right)^{-3} + \dots$$

निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$\left(\frac{2^2}{1^2} - \frac{2}{1}\right)^{-1} + \left(\frac{3^3}{2^3} - \frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{4^4}{3^4} - \frac{4}{3}\right)^{-3} + \dots$$

UNIT - III

(इकाई-III)

6. Let f be a real valued bounded function defined on $[a, b]$ and m & M be infimum and supremum of f in $[a, b]$ then prove that

$$n(b-a) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq M(b-a) \forall P \in P[a, b]$$

यदि फलन f अन्तराल $[a, b]$ पर परिभाषित एवं परिवद्ध वास्तविक फलन हो तथा m, M फलन f के $[a, b]$ में क्रमशः निम्नक एवं उच्चक हों, तो सिद्ध कीजिए

$$n(b-a) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq M(b-a) \forall P \in P[a, b]$$

7. If $f(x) = x$; $x \in [0, 1]$, then show that f is R-integrable on

$$[0, 1] \text{ and } \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$

यदि $f(x) = x$; $x \in [0, 1]$, तो सिद्ध कीजिए कि f अन्तराल $[0, 1]$ पर

$$\text{R-समाकलनीय है तथा } \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$

UNIT - IV
(इकाई-IV)

8. Test for uniform convergence the sequence $\{f_n(x)\}$ where

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \text{ when } 0 \leq x \leq 1.$$

अनुक्रम $\{f_n(x)\}$ का परीक्षण एक समान के लिए कीजिए जहाँ

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \text{ जब } 0 \leq x \leq 1.$$

9. Find the fourier series of the function $f(x) = x + x^2$ in the interval $(-\pi, \pi)$. Hence show that

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में फलन $f(x) = x + x^2$ के लिए फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

UNIF - V
(इकाई-V)

10. Test the convergence of $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

11. Test the convergence of the integral
निम्न समाकल का अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$$

PART - C

(खण्ड-स)

UNIT - I

(इकाई-I)

12. (a) Prove that no open interval (a, b) is compact.
(b) Prove that R is a connected set.
(a) सिद्ध कीजिए कि कोई विवृत (a, b) अन्तराल संहत नहीं है।
(b) सिद्ध कीजिए कि R सम्बद्ध समुच्चय है।

UNIT - II

(इकाई-II)

13. (a) Prove that the sequence $\{x_n\}$, where

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

is convergent.

- (b) Test the following series for convergence where the general terms are given as :

$$u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

- (a) सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{x_n\}$ जहाँ

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \text{ अभिसारी है।}$$

- (b) निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए, जिनके व्यापक पद हैं।

$$u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

UNIT - III

(इकाई-III)

14. (a) If f is defined on $[0, a]$, $a > 0$ by $f(x) = x^2$ $x \in [0, a]$

$$\text{then } f \in R[0, a] \text{ and } \int_0^a f(x) dx = \frac{a^3}{3}.$$

- (b) Find the upper and lower R-integrals of a functions of in $[0, 2]$

$$\text{where } f(x) = \begin{cases} x + x^2 & ; \text{ when } x \text{ is rational no.} \\ x^2 + x^3 & ; \text{ when } x \text{ is irrational no.} \end{cases}$$

- (a) यदि f अन्तराल $[0, a]$ में परिभाषित $f(x) = x^2$ हो तो

$$f \in R[0, a] \text{ तथा } \int_0^a f(x) dx = \frac{a^3}{3} \text{ जहाँ } a > 0 \text{ और } x \in [0, a].$$

- (b) अन्तराल $[0, 2]$ में फलन f के निम्न और उपरि R-समाकलन ज्ञात कीजिए जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 & ; \text{ जबकि } x \text{ परिमेय संख्या है} \\ x^2 + x^3 & ; \text{ जबकि } x \text{ परिमेय संख्या है} \end{cases}$$

UNIT - IV

(इकाई-IV)

15. (a) Find the Fouries series for the following function

$$f(x) = x; \quad -\pi < x < \pi$$

- (b) Find the Fouries series in the interval $-\pi < x < \pi$ for the function $f(x)$ defined as :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \text{ when } -\pi < x < 0. \\ \sin x & ; \text{ when } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

(a) निम्नलिखित फलन के लिए फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए

$$f(x) = x; -\pi < x < \pi$$

(b) निम्न प्रकार से परिभाषित फलन $f(x)$ के लिए अन्तराल $(-\pi, \pi)$

में फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \text{ जब } -\pi < x < 0 \\ \sin x & ; \text{ जब } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

UNIT - V

(इकाई-V)

16. (a) Test the convergence of the following integral

$$\int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}} dx$$

(b) Test the convergence of the following integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x^n} dx$$

(a) निम्न का अभिसरण परीक्षण कीजिए

$$\int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}} dx$$

(b) निम्न का अभिसरण परीक्षण कीजिए

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x^n} dx$$