1141/Sc.

I Year Science Examination, 2017

MATHEMATICS

Paper–I

(Algebra)

Time : Three Hours
Maximum Marks : 75

PART - A (खण्ड–अ) [Marks : 20

Answer all questions (50 words each).
All questions carry equal marks.
सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पचास शब्दों से अधिक न हो।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - B (खण्ड–ब) [Marks : 35

Answer *five* questions (250 words each).
Selecting *one* from each unit. All questions carry equal marks.
प्रत्येक इकाई से **एक–एक** प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए।
प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - C (खण्ड–स) [Marks : 20

Answer any *two* questions (300 words each).
All questions carry equal marks.
कोई **दो** प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - A

(खण्ड-अ)

UNIT - I

(इकाई-I)

1. (i) Define Hermitian matrix.

हर्मीशियन मैट्रिक्स को परिभाषित कीजिये।

(ii) Define row rank of a matrix.

किसी मैट्रिक्स पंक्ति कोटि को परिभाषित कीजिये।

UNIT - II

(इकाई-II)

(iii) If sum of the two roots of the given equation is zero, then find the roots.

यदि निम्न समीकरण को दो मूलों का योग शून्य हो तो हल ज्ञात कीजिए।

$$x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$$

(iv) Find the equation whose roots are reciprocals of the roots of the following equation.

वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल निम्न समीकरण के मूलों के व्युत्क्रम हो।

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 3 = 0$$

UNIT - III

(इकाई-III)

(v) Define cyclic group.

चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए।

(vi) Let G be a group and $a \in G$, then show that

$0(a) = 0(a^{-1})$

माना G एक समूह है और $a \in G$, तब दर्शाइये कि

$0(a) = 0(a^{-1})$

UNIT - IV

(इकाई-IV)

(vii) Find three cosets of 3z in the additive group (z, +) of integers.

समूह (z, +) में 3z के सभी सहकुलक ज्ञात कीजिए।

(viii) What do you mean by a simple group ?

सरल समूह से आप क्या समझते हैं?

UNIT - V

(इकाई-V)

(ix) What do you understand by group homomorphism ?

समूह समाकारिता से आप क्या समझते हैं?

(x) Show the mappinf $f:(z,+) \to (z,+)$, defined by $f(x) = 2x \forall x \in z$, is a monomorphism from z to it self.

दर्शाइये कि एक फलन $f:(z,+) \to (z,+)$ जो कि $f(x) = 2x$ द्वारा परिभाषित है जहाँ $x \in z$ है, एक z से स्वयं में एकैक समाकारिता है।

PART - B

(खण्ड-ब)

UNIT - I

(इकाई-I)

2. Show that every square matrix can be expressed uniquely as the sum of Hermitian and a skew Hermitian matrix.

प्रदर्शित कीजिए कि प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स की एक हर्मीशियन तक एक विषम हर्मीशियन मैट्रिक्स के योग के रूप में अद्वितीय प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है।

3. Prove that rank of a matrix A and its transpose A^T are same.

सिद्ध कीजिए कि किसी मैट्रिक्स A तथा इसकी परिवर्त मैट्रिक्स A^T की कोटियाँ समान होती है।

UNIT - II

(इकाई-II)

4. Find the condition that the equation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ shold have its roots α, β, γ and δ connected by the relation

$$\beta + \gamma = \alpha + \delta$$

वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जिससे कि समीकरण

$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ के मूल α, β, γ तथा δ सम्बन्ध $\beta + \gamma = \alpha + \delta$ से सम्बन्धित होने चाहिये।

5. Find the equation whose roots are increased by 2 than the roots of the following equation :

वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल निम्न समीकरण के मूलों से 2 अधिक हों।

$$4x^5 - 2x^3 + 7x - 3 = 0$$

UNIT - III

(इकाई-III)

6. Let G be a set of all the ordered pairs (a, b) a, b $\in$ R and $a \neq 0$. A binary composition * is defined in G as follows :

$$(a,b)\forall(c,d) = (ac, bc + d)$$

then, prove that (G, *) is a non-abelian group.

एक क्रमबद्ध युग्मों (a, b) का एक समुच्चय है जिसमें a, b $\in$ R और $a \neq 0$ दिया हुआ है। द्विधारी संक्रिया $(a,b)\forall(c,d) = (ac, bc + d)$ के द्वारा प्रदर्शित है तो सिद्ध कीजिए कि (G, *) एकनाव अबिलिपव समूह है।

7. Show that the order of every element of a finite group is finite and less than or equal to the order of the group.

सिद्ध कीजिए कि किसी परिमित समूह के प्रत्येक अवयव की कोटि परिमित होती है तथा यह या तो समूह के कोटि के बराबर होती है या इससे कम।

UNIT - IV
(इकाई-IV)

8. Show that intersection of any two normal subgroups is a normal subgroup.

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के किन्हीं दो विशिष्ट उपसमूहों का सर्वनिष्ठ उस समूह का एक विशिष्ट उपसमूह होता है।

9. Find the quotient group G/H where G = (z, +) and H = (4z, +). Also prepare the composition table of G/H.

समूह G/H का विभाग समूह ज्ञात कीजिए, जहाँ G = (z, +) तथा H = (4z, +) हैं।

UNIT - V
(इकाई-V)

10. If f is a homomorphism of a group G to a group G′ with kernel k, then prove that k is subgroup of G.

यदि f समूह G से G′ पर एक समाकारिता हो तो सिद्ध कीजिए कि f की अष्टि k समूह G का उपसमूह होता है।

11. Let H and K be two normal subgroups of G such that HCK. Then show that K/H is a normal subgroups of G/H and

$$\frac{G}{K} \cong \frac{G/H}{K/H}.$$

माना H तथा K दो विशिष्ट उपसमूह है G के, इस प्रकार की HCK तब सिद्ध कीजिए कि एक K/H विशिष्ट उपसमूह है G/H का और

$$\frac{G}{K} \cong \frac{G/H}{K/H}.$$

PART - C

(खण्ड-स)

UNIT - I

(इकाई-I)

12. Find the eigen values and corresponding eigen vectors of the following matrix.

निम्न मैट्रिक्स के अभिलाक्षणिक मूलों एवं उनके संगत संदिशों को ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

UNIT - II

(इकाई-II)

13. Solve the following equation by Ferrari's method.

फैरारी विधि से निम्न समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

$$x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = 0$$

UNIT - III

(इकाई-III)

14. Find $\sigma^{-1}\rho\sigma$. Also express the permutation ρ as a product of disjoint cycles. Find whether ρ is an even or odd permutation. Also give it's order.

$\sigma^{-1}\rho\sigma$ ज्ञात कीजिए। क्रमचय ρ को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल में व्यक्त करके बताइये कि ρ सम क्रमचय है अथवा विषम क्रमचय तथा इसकी कोटि भी ज्ञात कीजिए।

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma(1\ \ 3\ \ 4)(5\ \ 6)(2\ \ 7\ \ 8\ \ 9)$$

UNIT - IV

(इकाई-IV)

15. Show that the order of each subgroup of a finite group is a divisor of the order of the group.

दर्शाइये कि एक परिमित ग्रुप की प्रत्येक उपग्रुप का गुणांक, उस ग्रुप के गुणांक का भाजक होता है।

UNIT - V

(इकाई-V)

16. Show that every finite group is isomorphic to some permutation group.

दर्शाइये कि प्रत्येक परिमित ग्रुप किसी क्रमचय ग्रुप के तुल्यकारिक होता है।