

1143

I Year (T.D.C.) Science Examination, 2017

**MATHEMATICS**

(Geometry)

Paper-III

Time Allowed : Three Hours                      Maximum Marks : 75

**Part-A (खण्ड-अ) [Marks : 20**

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पचास शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**Part-B (खण्ड-ब) [Marks : 35**

Answer five questions (250 words each), selecting one from each Unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई में से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**Part-C (खण्ड-स) [Marks : 20**

Answer any two questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

## Part-A

### ( खण्ड-अ )

1. (i) Write general equation of conic section.

शांकव परिच्छेद का व्यापक समीकरण लिखिये।

- (ii) Find the eccentricity of the ellipse

$$9x^2+5y^2-30y=0$$

दीर्घवृत्त  $9x^2+5y^2-30y=0$  की उत्क्रेन्द्रता ज्ञात कीजिये।

- (iii) Define latus-rectum of hyperbola.

अतिपरवलय के नाभिलम्ब की परिभाषा लिखिये।

- (iv) Write polar equation of a line passing through two points.

दो बिन्दुओं से गुजरने वाली रेखा का ध्रुवीय समीकरण लिखिये।

- (v) Write the equation of a plane passing through three given points.

तीन असरेख बिन्दुओं से होकर जाने वाले समतल का समीकरण लिखिये।

(vi) Define image of a point in a plane.

एक समतल में एक बिन्दु के प्रतिबिम्ब को परिभाषित कीजिये।

(vii) Find the centre and radius of the following sphere :

निम्न गोले का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिये :

$$2x^2+2y^2+2z^2-2x+4y+2z-5 = 0$$

(viii) Define enveloping cone.

अन्वालोपी शंकु को परिभाषित कीजिये।

(ix) Define tangent plane.

स्पर्श तल को परिभाषित कीजिये।

(x) Define principal planes and principal directions.

मुख्य समतल तथा मुख्य दिशाओं की परिभाषा लिखिये।

**Part-B**

(खण्ड-ब)

**Unit-I**

(इकाई-I)

2. Find the equation of the following conic referred to the centre as origin :

केन्द्र को मूल बिन्दु लेकर निम्नलिखित शांकव का समीकरण ज्ञात करो :

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 26y + 29 = 0$$

3. Prove that the line  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$  is a tangent to the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , if

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha.$$

सिद्ध कीजिये कि रेखा  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$  दीर्घवृत्त

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  को स्पर्श करती है तो

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha.$$

## Unit-II

### ( इकाई-II )

4. Prove that the line  $lx+my+n=0$  will be normal to the hyperbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , if

सिद्ध करो कि सरल रेखा  $lx+my+n=0$  अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  के अभिलम्ब होगी, यदि—

$$\frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{n^2}$$

5. If  $PSP^1$  is a focal chord of a conic, then prove that the tangent at P and  $P^1$  intersect on directrix.  
यदि  $PSP^1$  किसी शंकु की नाभिय जीवा है, तो सिद्ध करो कि बिन्दु P तथा  $P^1$  पर खींची गई स्पर्श रेखायें एक दूसरे को नियता पर काटती है।

## Unit-III

### ( इकाई-III )

6. Find the equations of the two planes through the points  $(0, 4, -3)$  and  $(6, -4, 3)$  other than the planes through the origin which cut off from the axes intercepts whose algebraic sum is zero.

$(0, 4, -3)$  तथा  $(6, -4, 3)$  से होकर जाने वाले उन दो समतलों के समीकरण ज्ञात कीजिये (जो मूल बिन्दु से नहीं

जाते) जिनके द्वारा निदेशांशों पर काटे गये अन्तःखण्डों का बीजीय योग शून्य हो।

7. Find the equation of the line through the points (1,2,3) and parallel to the line

$$x-y+2z=5, \quad 3x+y+z=6$$

बिन्दु (1,2,3) से गुजरने वाली उस रेखा के समीकरण ज्ञात करो जो रेखा  $x-y+2z=5$ ,  $3x+y+z=6$  के समान्तर है।

#### Unit-IV

#### (इकाई-IV)

8. Find the equation of the sphere which touches the sphere  $x^2+y^2+z^2-x+3y+2z-3=0$  at the point (1,1,-1) and passes through the origin.

मूल बिन्दु से गुजरने वाले उस गोले का समीकरण ज्ञात करो जो गोले  $x^2+y^2+z^2-x+3y+2z-3=0$  को (1,1,-1) पर स्पर्श करता है।

9. Find the equation of the cylinder whose generates are parallel to the z-axis and intersects the curve  $ax^2+by^2=2z$ ,  $lx+my+nz=p$ .

उस बेलन का समीकरण ज्ञात करो जिसके जनक z-अक्ष के समान्तर है तथा वक्र  $ax^2+by^2=2z$ ,  $lx+my+nz=p$  को काटते हैं।

## Unit-V

### (इकाई-V)

10. Find the equation of the tangent plane at a point  $(\alpha, \beta, \gamma)$  of the conicoid  $f(x, y, z) = 0$

शांकवज  $f(x, y, z) = 0$  के किसी बिन्दु  $(\alpha, \beta, \gamma)$  पर स्पर्श तल का समीकरण ज्ञात कीजिये।

11. Find the equation of that plane section of the conicoid  $f(x, y, z) = 0$  whose centre is  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

शांकवाज  $f(x, y, z) = 0$  के उस समतल प्रतिच्छेद का समीकरण ज्ञात करो जिसका केन्द्र  $(\alpha, \beta, \gamma)$  है।

### Part-C

### (खण्ड-स)

12. Perpendicular tangents are drawn to the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , find the locus of the middle point of the chord of contact of these tangents.

दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , पर परस्पर लम्बवत् स्पर्श रेखायें खींची गई हो, तो इन स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवाओं के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात करो।

13. Find the equations of the tangent and normal to the hyperbola  $xy = c^2$  at the point  $(x_1, y_1)$ .

अतिपरवलय  $xy=c^2$  के लिये  $(x_1, y_1)$  पर स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात करो।

14. Through point  $p(\alpha, \beta, \gamma)$  a plane is drawn at right angles to OP to meet the coordinate axes in A, B, C,

Prove that the area of the triangle ABC is  $\frac{p^5}{2\alpha\beta\gamma}$ ,

$p = OP$ .

बिन्दु  $p(\alpha, \beta, \gamma)$  से एक समतल खींचा गया है जो OP के लम्बवत है तथा निर्देश-अक्षों को A, B, C पर काटता है। सिद्ध

करो कि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल  $\frac{p^5}{2\alpha\beta\gamma}$  है, जहाँ  $p = OP$ .

15. Prove that the plane  $ax+by+cz=0$  cuts the cone  $yz+zx+xy=0$  in perpendicular lines if  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ .

सिद्ध कीजिये कि समतल  $ax+by+cz=0$  शंकु  $yz+zx+xy=0$

को लम्ब रेखाओं में काटता है, यदि  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ .

16. Find the principal directions and principal plane of the following conicoid :

निम्न शांकवज की मुख्य दिशा एवं मुख्य तल ज्ञात कीजिये:

$$3x^2 - y^2 - z^2 + 6yz - 6x + 6y - 2z - 2 = 0$$