

1141/Arts
I Year Arts Examination, 2017

MATHEMATICS

Paper-I

(Algebra)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 70

PART - A (खण्ड-अ) [Marks : 20

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पचास शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - B (खण्ड-ब) [Marks : 30

Answer *five* questions (250 words each).

Selecting *one* from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - C (खण्ड-स) [Marks : 20

Answer any *two* questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - A

(खण्ड-अ)

1. Answer the following :

निम्न के उत्तर दीजिए :

UNIT - I

(इकाई-I)

- (i) Define conjugate transpose of a matrix.
किसी मैट्रिक्स के संयुग्मी परिवर्त को परिभाषित कीजिए।
- (ii) State the Cayley-Hamilton theorem.
कैली-हैमिल्टन प्रमेय का उल्लेख कीजिए।

UNIT - II

(इकाई-II)

- (iii) Form an equation of the lowest degree with rational coefficients having $1+\sqrt{5}$ and $1-\sqrt{5}$ as two of its roots.

परिमेय गुणांक सहित तथा न्यूनतम घात में समीकरण बनाइए जिसके मूल $1+\sqrt{5}$ तथा $1-\sqrt{5}$ हैं।

- (iv) Change the signs of the roots of the following equation:

$$x^7 + 5x^5 - x^3 + x^2 + 7x + 3 = 0$$

निम्न समीकरण के मूलों के चिन्ह विपरीत कीजिए :

$$x^7 + 5x^5 - x^3 + x^2 + 7x + 3 = 0$$

UNIT - III

(इकाई-III)

- (v) Define cyclic group.
चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिये।
- (vi) State cancellation law.
निरसन नियम का उल्लेख कीजिये।

UNIT - IV

(इकाई-IV)

- (vii) Define normalizer of an element in a group.
किसी समूह में अवयव के प्रसामान्यक को परिभाषित कीजिये।
- (viii) State Lagrange's theorem.
लागतन्त्र प्रमेय का उल्लेख कीजिये।

UNIT - V

(इकाई-V)

- (ix) Write any two properties of homomorphism.
समाकारिता के कोई दो गुणधर्म लिखिये।
- (x) State fundamental theorem on morphism.
समाकारिता के मूलभूत प्रमेय का उल्लेख कीजिये।

PART - B

(खण्ड-ब)

UNIT - I

(इकाई-I)

2. If A is symmetric matrix, then show that $B^T A B$ is symmetric matrix.

यदि A सममित मैट्रिक्स है तो सिद्ध कीजिए कि $B^T A B$ सममित मैट्रिक्स है।

3. Find the rank of matrix A, where :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स A की जाति ज्ञात कीजिये, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

UNIT - II

(इकाई-II)

4. Find the condition that the equation $x^3 - px^2 + 9x - r = 0$ may have two roots equal but opposite in sign.

प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए कि समीकरण $x^3 - px^2 + 9x - r = 0$ के दो मूल समान परन्तु विपरित चिन्ह के हों।

5. Find the equation whose roots are less by 2 than the roots of the equation

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = 0$$

उस समीकरण को ज्ञात कीजिए जिसके मूल समीकरण

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = 0 \text{ के संगत मूलों से 2 कम है।}$$

UNIT - III

(इकाई-III)

6. The intersection of any two subgroups of a group G is again a subgroup of G .

किसी समूह G के दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ G का उपसमूह होता है।

7. Express the following permutation as the product of disjoint cycles. Also find whether these permutation is even or odd

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 8 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

निम्न क्रमचय को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिये।

यह भी ज्ञात कीजिये यह क्रमचय सम है या विषम

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 8 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

UNIT - IV

(इकाई-IV)

8. Show that the order of a finite cyclic group is equal to the order of its generator.

प्रदर्शित कीजिये कि एक परिमित चक्रीय समूह की कोटि उसके जनक की कोटि के बराबर होती है।

9. Prove that any two left cosets of a subgroup are either identical or disjoint.

सिद्ध कीजिये कि किसी उप-समूह के दो वाम सहसमुच्चय या तो सर्वसम होते हैं या असंयुक्त।

UNIT - V

(इकाई-V)

10. Show that every homomorphic image of an abelian group is abelian.

प्रदर्शित कीजिये कि प्रत्येक आबेली समूह का समाकारी प्रतिबिम्ब भी आबेली होता है।

11. Prove that every infinite cyclic group is isomorphic to the additive group of integers i.e. $(\mathbb{Z}, +)$.

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक अपरिमित चक्रीय समूह पूर्णाकों के योज्य समूह $(\mathbb{Z}, +)$ के तुल्याकारी होता है।

PART - C

(खण्ड-स)

UNIT - I

(इकाई-I)

12. Apply matrix theory to solve the following system of equations:

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$-x + y - z = -2$$

मैट्रिक्स सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिये :

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$-x + y - z = -2$$

UNIT - II

(इकाई-II)

13. By Ferraris method solve the equation :

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 = 0$$

फैरारी विधि से समीकरण

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 = 0$$

को हल कीजिये।

UNIT - III

(इकाई-III)

14. For any group G , prove that its centre $Z(G)$ is a subgroup of G , where

$$Z(G) = \{x \in G / xg = gx, \forall g \in G\}$$

सिद्ध कीजिये कि किसी समूह G का केन्द्र $Z(G)$, G का उपसमूह है,

$$\text{जहाँ : } Z(G) = \{x \in G / xg = gx, \forall g \in G\}$$

UNIT - IV

(इकाई-IV)

15. Show that a subgroup H of a group G is a normal subgroup iff each left coset of H is right coset of H i.e.

$$H\Delta G \Leftrightarrow xH = Hx, \forall x \in G$$

प्रदर्शित कीजिये कि किसी समूह G का कोई उपसमूह H एक प्रसामान्य उप-समूह होता है यदि और केवल यदि H का प्रत्येक वाम सह समुच्चय H का दक्षिण सहसमुच्चय हो अर्थात्

$$H\Delta G \Leftrightarrow xH = Hx, \forall x \in G$$

UNIT - V

(इकाई-V)

16. Prove that the relation of isomorphism ' \cong ' in the set of all groups is an equivalence relation.

सिद्ध कीजिये कि समूहों के समुच्चय में तुल्याकारिता का सम्बन्ध ' \cong ' एक तुल्यता सम्बन्ध है।