Total Pages : 8

2141/Arts

Second Year Arts Examination, 2017

MATHEMATICS

Paper–I

(Advanced Calculus)

Time : Three Hours
Maximum Marks : 70

PART - A (खण्ड-अ) [Marks : 20

Answer all questions (50 words each).
All questions carry equal marks.
सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पचास शब्दों से अधिक न हो।
सभी प्रश्नों के अंक **समान** हैं।

PART - B (खण्ड-ब) [Marks : 30

Answer *five* questions (250 words each).
Selecting *one* from each unit. All questions carry equal marks.
प्रत्येक इकाई से **एक-एक** प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए।
प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - C (खण्ड-स) [Marks : 20

Answer any *two* questions (300 words each).
All questions carry equal marks.
कोई **दो** प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - A

(खण्ड-अ)

UNIT - I

(इकाई-I)

1. (i) Show that the identify function $f(x) = x, \forall x \in R$ is differentiable every where.

सिद्ध कीजिए कि तत्समक फलन $f(x) = x, \forall x \in R$ में सर्वत्र अवकलनीय है।

(ii) Define continuity in the closed interval.

संवृत अन्तराल में सांतत्वय को परिभाषित कीजिए।

UNIT - II

(इकाई-II)

(iii) Write down the envelope of straight lines

$Y = \max + a\sqrt{(1+m^2)}$ (m is the parameter)

सरल रेखाओं $Y = \max + a\sqrt{(1+m^2)}$ का अन्वालोप लिखिए।

(iv) If $u = e^{xyz}$, then find $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$.

यदि $u = e^{xyz}$, तो ज्ञात कीजिए $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$.

UNIT - III

(इकाई-III)

(v) Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^1 \int_0^2 (x+y)dxdy$$

(vi) Change the order of integration of the following integral:

निम्न समाकल के समाकलन क्रम को परिवर्तित कीजिए :

$$\int_0^b \int_x^b \frac{ydydx}{\left(x^2+y^2\right)}$$

UNIT - IV

(इकाई-IV)

(vii) Define gradient of a scalar point function.

अदिश बिन्दु फलन की प्रवणता की परिभाषा दीजिए।

(viii) Give the definition of curl of a vector point function.

सदिश बिन्दु फलन की कृन्तल की परिभाषा दीजिए।

UNIT - V

(इकाई-V)

(ix) Write the statement of stoke's theorem.

स्टॉक प्रमेय के कथन को लिखिये।

(x) Write the statement of Gauss's theorem.

गॉस प्रमेय के कथन को लिखिये।

PART - B

(खण्ड-ब)

UNIT - I

(इकाई-I)

2. Show that the following function is continuous at the point $x = a$.

   सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन बिन्दु $x = a$ पर संतत है :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{a} - a & ; \quad 0 < x < a \\ 0 & ; \quad x = a \\ a - \dfrac{a^3}{x^2} & ; \quad x > a \end{cases}$$

3. Show that the function $f(x) = \sin x, \forall x \in R$ is differentiable everywhere.

   सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \sin x, \forall x \in R$ में सर्वत्र अवकलनीय है।

UNIT - II

(इकाई-II)

4. If $u = \log\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\right)$ then, prove that

   यदि $u = \log\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\right)$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}$$

5. Find the points where the function $x^3 + y^3 - 3axy$ has maximum or minimum value.

उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहाँ फलन $x^3 + y^3 - 3axy$ का मान उच्चतम या न्यूनतम है।

UNIT - III

(इकाई-III)

6. Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos\theta} r\sin\theta \, d\theta \, dr$$

7. Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{-a}^{a} \int_{b}^{b} \int_{c}^{c} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dx dy dz$$

UNIT - IV

(इकाई-IV)

8. If $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, then find the value of following :

यदि $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$$

9. If $f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$, find the value of gradf at the point $(1, -2, -1)$.

यदि $f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$ तो बिन्दु $(1, -2, -1)$ पर gradf का मान ज्ञात कीजिए।

UNIT - V

(इकाई-V)

10. Apply Stoke's theorem to prove that

$$div\ curl\ \vec{F} = 0$$

स्टोक्स प्रमेय का प्रयोग कर सिद्ध कीजिए कि

$$div\ curl\ \vec{F} = 0$$

11. Evaluate by Green's theorem :

$$\int_C \left[(\cos x \sin y - xy)\,dx + \sin x \cos y\,dy \right]$$

where C is the circle $x^2 + y^2 = 1$.

ग्रीन प्रमेय द्वारा निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_C \left[(\cos x \sin y - xy)\,dx + \sin x \cos y\,dy \right]$$

जहाँ C वृत $x^2 + y^2 = 1$ है।

PART - C

(खण्ड-स)

UNIT - I

(इकाई-I)

12. If f is differentiable on [a, b] and if k is a number between f'(a) and f'(b), then show that there exists a number $c \in (a, b)$ such that f'(c) = k.

यदि f फलन अन्तराल [a, b] में अवकलनीय है तथा f'(a) और f'(b) के मध्य कोई संख्या k है तो प्रदर्शित कीजिए कि अन्तराल (a, b) में एक संख्या c इस प्रकार विद्यमान होगी कि f'(c) = k.

UNIT - II

(इकाई-II)

13. If $x^3 + y^3 - 3ax^2 = 0$, prove that

यदि $x^3 + y^3 - 3ax^2 = 0$, तो सिद्ध कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2a^2x^2}{y^5} = 0$$

UNIT - III

(इकाई-III)

14. Find the volume common to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and the cylinder $x^2 + y^2 = ax$.

गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ तथा बेलन $x^2 + y^2 = ax$ का उभयनिष्ठ आयतन ज्ञात कीजिए।

UNIT - IV

(इकाई-IV)

15. If r = |r|, where r = xi + yj + zk prove that

यदि r = |r|, जहाँ r = xi + yj + zk तो सिद्ध कीजिए कि

$$\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$$

UNIT - V

(इकाई-V)

16. Use Gauss's divergence theorem to show that

$$\iint_S (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy) = 4\pi a^3$$

where the surface S is the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

गॉस प्रमेय की सहायता से प्रदर्शित कीजिए कि

$$\iint_S (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy) = 4\pi a^3$$

जहाँ सतह S, गोला $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ है।