

# 3141-Arts

**B.A. (Third Year) Examination, 2017**

**MATHEMATICS**

Paper – I

(Real Analysis)

*Time : Three Hours*

*Maximum Marks : 70*

**PART–A**

[Marks : 20]

(खण्ड-अ)

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART–B**

[Marks : 30]

(खण्ड-ब)

Answer *five* questions (250 words each). Select *one* question from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART–C**

[Marks : 20]

(खण्ड-स)

Answer any *two* questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से

अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

## PART-A

### ( खण्ड-अ )

#### UNIT-I

##### (इकाई-I)

1. (i) Define ordered field and complete ordered field.  
क्रमित क्षेत्र व पूर्ण क्रमित क्षेत्र को परिभाषित कीजिये।
- (ii) Define limit point of a set and derived set.  
समुच्चय का सीमा बिन्दु व व्युत्पन्न समुच्चय को परिभाषित कीजिये।

#### UNIT-II

##### (इकाई-II)

- (iii) State Cauchy's first and second theorem on limits.  
कॉशी का सीमा पर प्रथम व द्वितीय प्रमेय का कथन लिखिए।
- (iv) Show that the following series is convergent.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी अभिसारी है।

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

#### UNIT-III

##### (इकाई-III)

- (v) Write definition of Darboux sum.  
डारबू योग को परिभाषित कीजिए।

- (vi) Write necessary and sufficient condition for R-integrability.

रीमान-समाकलनीयता के लिए आवश्यक व पर्याप्त प्रतिबन्ध लिखिए।

### UNIT-IV

#### (इकाई-IV)

- (vii) Define uniform convergence of a series of functions.

फलनों की एक श्रेणी के एकसमान अभिसरण की परिभाषा दीजिए।

- (viii) What is Fourier series ? Also write the values of  $a_n$  and  $b_n$ .

फूरिये श्रेणी क्या है ?  $a_n$  व  $b_n$  के मान भी लिखिए।

### UNIT-V

#### (इकाई-V)

- (ix) Define countable set with an example.

गणनीय समुच्चय को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।

- (x) Define improper integral of first and second kind.

प्रथम एवं द्वितीय प्रकार के अनन्त समाकल को परिभाषित कीजिए।

## PART-B

( खण्ड-ब )

### UNIT-I

(इकाई-I)

2. Prove that every complete ordered field  $F$  is an Archimedean ordered field.

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक पूर्ण क्रमित क्षेत्र  $F$  आर्किमिडिय क्षेत्र होता है।

3. The set of a rational numbers is a denumerable set.  
परिमेय संख्याओं का समुच्चय एक अपरिमित गणनीय समुच्चय है।

### UNIT-II

(इकाई-II)

4. A sequence  $\langle x_n \rangle$  of positive term defined by :

$$x_1 = K > 0, x_{n+1} = \frac{3 + 2x_n}{2 + x_n} \forall n \in \mathbb{N}$$

is convergent and find the limit.

धनात्मक पदों का एक अनुक्रम  $\langle x_n \rangle$  निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$$x_1 = K > 0, x_{n+1} = \frac{3 + 2x_n}{2 + x_n} \forall n \in \mathbb{N}$$

अभिसारी है तथा सीमा ज्ञात कीजिए।

5. Test the convergence of the following series :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{3^3}{4^4} + \dots$$

निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिये :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{3^3}{4^4} + \dots$$

### UNIT-III

#### (इकाई-III)

6. Discuss the convergence and absolute convergence of the following series :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+2x} - \frac{1}{a+3x} + \dots$$

निम्न श्रेणी के अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+2x} - \frac{1}{a+3x} + \dots$$

7. Prove that every monotonic function  $f$  is R-integrable.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक एकदिष्ट फलन R-समाकलनीय होता है।

## UNIT-IV

### (इकाई-IV)

8. Examine for uniform convergence the series the sum of whose  $n$  terms is  $S_n(x)$  where :

$$S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}; 0 \leq x \leq 1.$$

एक समान अभिसरण के लिए उस श्रेणी का परीक्षण कीजिए जिसके  $n$  पदों का योग  $S_n(x)$  है, जहाँ :

$$S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}; 0 \leq x \leq 1.$$

9. Find the Fourier series of the function  $f(x) = x + x^2$  in the interval  $(-\pi, \pi)$  and show that :

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

फलन  $f(x) = x + x^2$ ,  $-\pi < x < \pi$  के लिए फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए तथा यह भी दर्शाइये कि :

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

## UNIT-V

### (इकाई-V)

10. Examine the convergence of the integral :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

निम्न समाकल के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

11. Prove that every compact subset of a real numbers is closed and bounded.

सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक संहत उपसमुच्चय संवृत तथा परिबद्ध होता है।

## PART-C

### (खण्ड-स)

## UNIT-I

### (इकाई-I)

12. (i) Show that every infinite bounded set has atleast one limit point.

प्रदर्शित कीजिए कि प्रत्येक असीमित परिबद्ध समुच्चय का कम-से-कम एक सीमा बिन्दु होता है।

- (ii) If A and B are countable sets then prove that  $A \times B$  is also countable.

यदि A और B गणनीय समुच्चय हों तो सिद्ध कीजिए कि  $A \times B$  भी गणनीय समुच्चय होगा।

## UNIT-II

### (इकाई-II)

13. (i) Prove that the following sequence  $\{x_n\}$ , where

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ and } x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{3} \forall n \in \mathbb{N}$$

is convergent and also find its limit.

सिद्ध कीजिए कि निम्न अनुक्रम  $\{x_n\}$  जहाँ

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ तथा } x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{3} \forall n \in \mathbb{N}$$

अभिसारी है। इसकी सीमा भी ज्ञात कीजिए।

- (ii) Test the convergence of the following series :

$$\frac{2x}{1^2} + \frac{3^2 x^2}{2^3} + \frac{4^3 x^3}{3^4} + \frac{5^4 x^4}{4^5} + \dots$$

निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$\frac{2x}{1^2} + \frac{3^2 x^2}{2^3} + \frac{4^3 x^3}{3^4} + \frac{5^4 x^4}{4^5} + \dots$$



### UNIT-III

#### (इकाई-III)

14. Define Riemann integral. State and prove necessary and sufficient condition for R-integrability.

रीमान समाकलन को परिभाषित कीजिये। रीमान-समाकलनीयता के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

### UNIT-IV

#### (इकाई-IV)

15. (i) Find the Fourier series for the function  $f(x) = x \sin x$ ,  $-\pi < x < \pi$  and deduce that :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots$$

फलन  $f(x) = x \sin x$ ,  $-\pi < x < \pi$  के लिये फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए तथा निगमन कीजिये।

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots$$

- (ii) Test the convergence and absolute convergence of the series :

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} + \dots$$

निम्न श्रेणी के अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} + \dots$$

## UNIT-V

### (इकाई-V)

16. Test the convergence of the following integrals :

$$(i) \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x^2} dx, \quad a > 0.$$

$$(ii) \int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}} dx.$$

निम्न समाकल के लिए अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$(i) \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x^2} dx, \quad a > 0.$$

$$(ii) \int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}} dx.$$

---