Roll No. : ....

Total Pages : 8

3142/Arts

B.A. (Third Year) Examination, 2017

MATHEMATICS

Paper – II

(Abstract Algebra)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 65

PART–A [Marks : 20]

(खण्ड-अ)

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART–B [Marks : 25]

(खण्ड-ब)

Answer *five* questions (250 words each). Select *one* question from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से **एक-एक** प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART–C [Marks : 20]

(खण्ड-स)

Answer any *two* questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई **दो** प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART–A

(खण्ड-अ)

UNIT–I

(इकाई–I)

1. (i) For any a, b of a ring R, prove that

$$a(-b) = -(ab) = (-a)b.$$

किसी रिंग R के किन्हीं अवयव a, b के लिए सिद्ध कीजिए

$$a(-b) = -(ab) = (-a)b.$$

(ii) Define Subfield.

उप-क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।

UNIT–II

(इकाई–II)

(iii) Define Kernel of Ring homomorphism.

रिंग समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिए।

(iv) Find the quotient ring R/I, where $I = \{un \mid n \in z\}$ and $R = (z, +, \cdot)$

विभागवलय R/I ज्ञात कीजिए जहाँ $I = \{un \mid n \in z\}$ तथा $R = (z, +, \cdot)$ है।

UNIT-III

(इकाई–III)

(v) If S and T are subspace of a vector space V(F), then show $S \subset L(T) \Rightarrow L(S) \subset L(T)$.

यदि S एवं T सदिश समष्टि V(F) के उपसमुच्चय हैं तो बताइए $S \subset L(T) \Rightarrow L(S) \subset L(T)$.

(vi) Show that vectors (1, 1, 1), (2, 2, 0) and (3, 0, 0) span R^3.

सिद्ध कीजिए कि सदिश (1, 1, 1), (2, 2, 0) एवं (3, 0, 0) समष्टि R^3 की विस्तृति करते हैं।

UNIT-IV

(इकाई–IV)

(vii) Define basis and dimension of a vector space.

किसी सदिश समष्टि के आधार एवं विमा की परिभाषा लिखिए।

(viii) Show that the set S = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} forms a basis of vector space $V_3(R)$.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय

$$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

सदिश समष्टि $V_3(R)$ का एक आधार बनाता है।

UNIT–V

(इकाई–V)

(ix) Is this mapping $t : V_2(R) \to V_2(R);\ t(x, y) = (x^3, y^3)$ a linear transformation ?

क्या यह प्रतिचित्रण $t : V_2(R) \to V_2(R);\ t(x, y) = (x^3, y^3)$ एक रैखिक रूपान्तरण है ?

(x) Define dual space and dual basis.

द्वैती समष्टि एवं द्वैती आधार को परिभाषित कीजिए।

PART–B

(खण्ड-ब)

UNIT–I

(इकाई–I)

2. Prove that a finite commutative ring without zero divisors is a field.

सिद्ध कीजिए कि शून्य भाजक रहित एक परिमित क्रमविनिमेय वलय एक क्षेत्र होता है।

3. If $a \in R$, then prove that normalizer of a in R $N(a) = \{r \in R \mid ar = ra\}$ is a subring of R.

यदि $a \in R$, तो सिद्ध कीजिए कि R में a का प्रसामान्यक $N(a) = \{r \in R \mid ar = ra\}$ R का उपवलय है।

UNIT–II
(इकाई–II)

4. If f be a ring homomorphism from $(R, +, \cdot)$ to $(R', \oplus, \odot)$ then prove that the Kernel f is an ideal of R.

यदि f, $(R, +, \cdot)$ से $(R', \oplus, \odot)$ में रिंग समाकारिता है, तो सिद्ध कीजिए कि f की अष्टि रिंग की गुणजावली होती है।

5. Prove that every homomorphic image of a ring R is isomorphic to some quotient ring.

सिद्ध कीजिए कि किसी वलय R का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब उसके किसी विभाग वलय के तुल्यकारी होता है।

UNIT–III
(इकाई–III)

6. Prove that union of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space V(F) is a subspace iff either $W_1 \subset W_2$ or $W_2 \subset W_1$.

सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V(F) की दो उप-समष्टियों W_1 तथा W_2 का संघ एक उपसमष्टि होता है यदि

$W_1 \subset W_2$ or $W_2 \subset W_1$.

7. Show that vectors $\alpha_1 = (1+i, 2i)$ and $\alpha_2 = (1, 1+i)$ are linearly dependent in $V_2(C)$ but they are linearly independent in $V_2(R)$.

बताइए कि सदिश $\alpha_1 = (1+i, 2i)$ तथा $\alpha_2 = (1, 1+i)$ सदिश समष्टि $V_2(C)$ में linearly dependent है परन्तु सदिश समष्टि $V_2(R)$ में linearly independent है।

UNIT–IV

(इकाई–IV)

8. Prove that any *two* basis of a finite dimensional vector space have the same number of elements.

सिद्ध कीजिए कि एक परिमित विमीय सदिश समष्टि के किन्हीं दो आधारों में अवयवों की संख्या समान होती है।

9. Show that the set $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ forms a basis of the vector space $V_3(R)$.

बताइए कि समुच्चय $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ सदिश समष्टि $V_3(R)$ का एक आधार निर्मित करता है।

UNIT–V

(इकाई–V)

10. Show that the mapping $f : V_3(F) \to V_2(F)$ which is defined by $f(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2)$ is homomorphism. Also find its Kernel.

सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $f : V_3(F) \to V_2(F)$ जो $f(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2)$ से परिभाषित है, V_3 से V_2 पर आच्छादक समाकारिता है। इसकी अष्टि भी ज्ञात कीजिए।

11. If V and V′ be finite dimensional vector space over the same field F, then prove that

$$\dim \operatorname{Hom}(V, V') = \dim V \times \dim V'.$$

यदि एक फील्ड (क्षेत्र) F पर V तथा V′ परिमित विमीय सदिश समष्टियाँ हैं तो सिद्ध कीजिए

$$\dim \operatorname{Hom}(V, V') = \dim V \times \dim V'.$$

PART–C

(खण्ड-स)

UNIT–I

(इकाई–I)

12. Prove that a commutative ring with unity is a field if it has no proper ideals.

सिद्ध कीजिए कि एक तत्समकी क्रमविनिमेय वलय फील्ड (क्षेत्र) होता है यदि इसमें कोई उचित गुणजावली विद्यमान न हो।

UNIT–II

(इकाई–II)

13. Prove that every ring can be embedded in a ring with unity.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक रिंग का एक तत्समकी रिंग में अर्न्तस्थापन किया जा सकता है।

UNIT–III

(इकाई–III)

14. Show that the set positive real numbers R^+ is vector space for the operations

$$x \oplus y = xy, \ \forall x,\ y \in R^+$$

$$a \odot x = x^a, \text{ and } a \in R.$$

बताइए कि धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R^+ संक्रियाओं

$$x \oplus y = xy, \ \forall x,\ y \in R^+$$

$$a \odot x = x^a, \text{ तथा } a \in R$$

के लिए एक सदिश समष्टि बनाता है।

UNIT–IV

(इकाई–IV)

15. If W be a subspace of a finite dimensional vector space V(F) then prove that

$$\dim (V/W) = \dim V - \dim W.$$

यदि W एक परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) की एक उपसमष्टि है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\dim (V/W) = \dim V - \dim W.$$

UNIT–V

(इकाई–V)

16. If t is linear transformation defined from a vector space V(F) to V′(F) (where V(F) is finite dimensional), then prove that

$$\text{rank } (t) + \text{nullity } (t) = \dim V.$$

यदि t सदिश समष्टि V(F) से V′(F) में परिभाषित एक रैखिक रूपान्तरण है (जहाँ V(F) परिमित विमीय है) तो सिद्ध कीजिए

$$\text{rank } (t) + \text{nullity } (t) = \dim V.$$