This question paper contains 8+2 printed pages]

3142/Arts

B.A. (Third Year) EXAMINATION, 2018

MATHEMATICS

Paper II

(Abstract Algebra)

Time allowed : Three Hours

Maximum Marks : 65

Part A (खण्ड 'अ') [Marks : **20**]

Answer all questions (50 words each).

***All** questions carry equal marks.*

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो। **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं।

Part B (खण्ड 'ब') [Marks : **25**]

*Answer five questions (250 words each), selecting **one** question from each Unit.*

***All** questions carry equal marks.*

प्रत्येक इकाई से **एक** प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो। **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं।

Part C (खण्ड 'स') [Marks : 20]

*Answer any two questions (**300** words each).*

***All** questions carry equal marks.*

*कोई **दो** प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **300** शब्दों से अधिक न हो। **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Part A (खण्ड 'अ')

1. (*i*) Define Integral Domain.

   पूर्णांकीय प्रांत को परिभाषित कीजिए।

   (*ii*) Define principal ideal.

   मुख्य गुणजावली को परिभाषित कीजिए।

   (*iii*) Define Ring Morphism.

   रिंग समाकारिता को परिभाषित कीजिए।

   (*iv*) Define Quotient field.

   विभाग क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।

(*v*) Define subspace.

उपसमिष्टि को परिभाषित कीजिए।

(*vi*) Show vectors (1, 2, 3), (1, 0, 1) and (0, 1, 0) of $V_3(R)$ are linearly independent.

बताइये कि $V_3(R)$ के सदिश (1, 2, 3), (1, 0, 1) एवं (0, 1, 0) एक घात स्वतंत्र है।

(*vii*) If W_1 and W_2 are two subspaces of a finite dimensional vector space V(F), then $\dim(W_1 + W_2) = ?$

यदि W_1 और W_2 एक परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमिष्टियाँ हों तो $(W_1 + W_2)$ की विमा क्या होगी ?

(*viii*) Write the existence theorem for a Basis.

आधार के लिए अस्तित्व प्रमेय का कथन लिखिए।

(*ix*) Define Dual Basis.

द्वैती आधार को परिभाषित कीजिए।

(*x*) Write the Sylvester's law of nullity.

सिल्वेस्टर का शून्यता का नियम लिखिए।

Part B (खण्ड 'ब')

Unit I (इकाई I)

2. Prove that the intersection of two subring is again subring.

सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है।

3. Prove that the ring (Z, +, ×) of integers is a principal ideal ring.

सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों की रिंग (Z, +, ×) एक मुख्य गुणजावली रिंग है।

Unit II (इकाई II)

4. Find the quotient ring R/I where R = (Z, +, ×) and $I = \{un \mid n \in z\}$.

विभाग वलय R/I ज्ञात कीजिए जहाँ R = (Z, +, ×) तथा $I = \{un \mid n \in z\}$ ।

5. Prove that every homomorphic image of a ring R is isomorphic to some quotient ring.

सिद्ध कीजिए कि किसी वलय R का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब उसके किसी विभाग वलय के तुल्यकारी होता है।

Unit III (इकाई III)

6. Show that the set

$$W = \{(a, b, c) \mid a - 3b + 4c = 0;\ a, b, c \in R\}$$

of 3-tuples is a subspace of the vector space $V_3(R)$.

सिद्ध कीजिये कि समुच्चय

$$W = \{(a, b, c) \mid a - 3b + 4c = 0;\ a, b, c \in R\}$$

3-तुपलों के सदिश समष्टि $V_3(R)$ का एक उपसमष्टि है।

7. Prove that every non-empty subset of a LI set of vectors is also LI.

सिद्ध कीजिए कि सदिशों के एकघात स्वतंत्र समुच्चय का प्रत्येक अरिक्त उपसमुच्चय भी एक घात स्वतंत्र होता है।

Unit IV (इकाई IV)

8. Prove that every finite dimensional vector space has a basis.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित विमीय सदिश समष्टि का एक आधार विद्यमान होता है।

9. Show that the set

$$S = \{(1, 2, 1); (2, 1, 0); (1, -1, 2)\}$$

form a basis of the vector space $V_3(R)$.

बताइये कि समुच्चय

$$S = \{(1, 2, 1); (2, 1, 0); (1, -1, 2)\}$$

सदिश समष्टि $V_3(R)$ का एक आधार बनाता है।

Unit V (इकाई V)

10. Prove that the kernal of linear transformation is a subspace.

सिद्ध कीजिए कि किसी रैखिक प्रतिचित्रण की अष्टि एक उपसमष्टि होती है।

11. Let dim(V(F)) = n and if

$$B = \{b_1, b_2, \ldots\ldots b_n\}, \quad B' = \{x_1, x_2, \ldots\ldots x_n\}$$

are the basis and dual basis sets of V, then prove that :

$$x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots\ldots + x_nb_n = I_V$$

(identity mapping from V to V).

माना कि (V(F)) एक n विमा की सदिश समष्टि है तथा यदि

$$B = \{b_1, b_2, \ldots\ldots b_n\}, \quad B' = \{x_1, x_2, \ldots\ldots x_n\}$$

V के क्रमश: आधार तथा द्वैती आधार हों, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots\ldots + x_nb_n = I_V$$

Part C (खण्ड 'स')

Unit I (इकाई I)

12. For any $a, b \in R$ show that $(R, \oplus, \odot)$ is the field. Where :

$$a \oplus b = a + b - 1 \text{ and } a \odot b = a + b - ab.$$

सिद्ध कीजिए कि $(R, \oplus, \odot)$ एक क्षेत्र है, जहाँ $a, b \in R$ के लिए

$$a \oplus b = a + b - 1 \text{ तथा } a \odot b = a + b - ab \text{ ।}$$

Unit II (इकाई II)

13. Prove that every ring can be embedded in a ring with unity.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक रिंग का तत्समकी रिंग में अन्तस्र्थापन किया जा सकता है।

Unit III (इकाई III)

14. Prove that the necessary and sufficient condition for a non-void subset W of a vector space V(F) to be subspace of V(F) is for $a, b \in F$ and

$$\alpha, \beta \in W \Rightarrow (a\alpha + b\beta) \in W.$$

सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V(F) के एक अरिक्त उपसमुच्चय W के लिए V(F) की एक उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध $a, b \in F$ तथा

$$\alpha, \beta \in W \Rightarrow (a\alpha + b\beta) \in W$$

है।

Unit IV (इकाई IV)

15. Prove that the set

$$S = \{a + ib, c + id\}$$

is a basis set of the vector space C(R) iff $(ad - bc) \neq 0$.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय

$$S = \{a + ib, c + id\}$$

सदिश समष्टि C(R) का एक आधार समुच्चय है यदि और केवल यदि $(ad - bc) \neq 0$ ।

Unit V (इकाई V)

16. Prove that the mapping $t : V_2(R) \to V_3(R)$, defined by :

$$t(a, b) = (a + b, a - b, b) \quad \forall\, a, b \in R$$

is a linear transformation. Also find range, rank and nullity.

सिद्ध कीजिए कि $V_2(R)$ से $V_3(R)$ में परिभाषित प्रतिचित्रण

$$t(a, b) = (a + b, a - b, b) \quad \forall\, a, b \in R$$

एक रैखिक प्रतिचित्रण है, इसका परास, कोटि और शून्यता भी ज्ञात कीजिए।