

**1141/Arts****Ist Year Arts Examination, 2018****MATHEMATICS**

Paper – I

(Algebra)

*Time : Three Hours**Maximum Marks : 70*

PART-A

[Marks : 20]

(खण्ड-अ)

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART-B

[Marks : 30]

(खण्ड-ब)

Answer *five* questions (250 words each). Select *one* question from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART-C

[Marks : 20]

(खण्ड-स)

Answer any *two* questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से

अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

## PART-A

### ( खण्ड-अ )

1. Answer the following :

निम्न के उत्तर दीजिए :

#### UNIT-I

##### (इकाई-I)

(i) Define Rank of a Matrix.

किसी मैट्रिक्स की जाति को परिभाषित कीजिये।

(ii) Define Orthogonal Matrix.

लाम्बिक मैट्रिक्स को परिभाषित कीजिये।

#### UNIT-II

##### (इकाई-II)

(iii) Change the signs of the roots of the following equation :

$$x^5 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 9 = 0$$

निम्न समीकरण के मूलों के चिन्ह बदलिए :

$$x^5 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 9 = 0$$

(iv) Find the equation whose roots are reciprocals of the roots of the following equation :

$$x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 5x - 2 = 0$$

उस समीकरण को ज्ञात कीजिये जिसके मूल निम्न समीकरण के मूलों के व्युत्क्रम हैं :

$$x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 5x - 2 = 0.$$

## UNIT-III

### (इकाई-III)

- (v) Define Even and Odd permutations.

सम और विषम क्रमचय को परिभाषित कीजिये।

- (vi) Define order of an element of a group.

किसी समूह के अवयव की कोटि को परिभाषित कीजिए।

## UNIT-IV

### (इकाई-IV)

- (vii) Define Index of a Subgroup.

उपसमूह के सूचकांक को परिभाषित कीजिये।

- (viii) Define Left and Right Cosets.

वाम और दक्षिण सहसमुच्चय को परिभाषित कीजिये।

## UNIT-V

### (इकाई-V)

- (ix) Define Kernel of Homomorphism.

समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिये।

- (x) Define Automorphism of a Group.

समूह स्वाकारिता को परिभाषित कीजिये।

## PART-B

( खण्ड-ब )

### UNIT-I

(इकाई-I)

2. Show that :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

प्रदर्शित कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Show that every square matrix can be uniquely expressed as the sum of a Hermitian and a Skew Hermitian matrix. प्रदर्शित कीजिए कि प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स को एक हर्मीशियन तथा एक विषम हर्मीशियन मैट्रिक्स के योग के रूप में अद्वितीय प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है।

### UNIT-II

(इकाई-II)

4. The sum of two roots of the equation

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x + 4 = 0$$

is equal to zero. Find its roots.

समीकरण  $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x + 4 = 0$  के दो मूलों का योग शून्य है। इसके मूल ज्ञात कीजिए।

5. Solve the equation  $x^3 - 18x - 35 = 0$  by Cardan's Method.  
समीकरण  $x^3 - 18x - 35 = 0$  को कार्डन विधि से हल कीजिए।

### UNIT-III

#### (इकाई-III)

6. Show that  $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  is an Abelian group for the operation ' $t_5$ ' defined as follows :

$$a t_5 b = \begin{cases} a+b & , \text{ if } a+b < 5 \\ a+b-5 & , \text{ if } a+b \geq 5 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि  $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  संक्रिया ' $t_5$ ' के लिए एक क्रमविनिमय समूह है, जहाँ ' $t_5$ ' निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$a t_5 b = \begin{cases} a+b & , \text{ यदि } a+b < 5 \\ a+b-5 & , \text{ यदि } a+b \geq 5 \end{cases}$$

7. Prove that the union of two subgroups is a subgroup iff one is contained in the other.

दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह होता है यदि एक उपसमूह दूसरे में अन्तर्विष्ट हो। सिद्ध कीजिए।

### UNIT-IV

#### (इकाई-IV)

8. State and Prove Lagrange's theorem for a finite group.  
परिमित समूह के लिए लॉग्रान्ज प्रमेय का कथन लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

9. Prove that if  $H$  is a subgroup of  $G$  and  $N \triangleleft G$ , then  $H \cap N \triangleleft H$ .

यदि  $H$  समूह  $G$  का कोई एक उपसमूह  $N \triangleleft G$  हो, तो  $H \cap N \triangleleft H$  सिद्ध कीजिए।

## UNIT-V

### (इकाई-V)

10. Show that if  $f$  is a homomorphism from a group  $G$  to  $G'$  and if  $e$  and  $e'$  be their respective identities, then

(a)  $f(e) = e'$

(b)  $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}, \forall a \in G.$

प्रदर्शित कीजिये यदि  $f$  समूह  $G$  से  $G'$  पर एक समाकारिता हो तथा  $e$  और  $e'$  क्रमशः  $G$  और  $G'$  में तत्समक हों, तो

(a)  $f(e) = e'$

(b)  $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}, \forall a \in G.$

11. A homomorphism defined from a group  $G$  on to  $G'$  is an isomorphism iff  $\ker(f) = \{e\}$ . Prove it.

सिद्ध कीजिये किसी समूह  $G$  से समूह  $G'$  पर परिभाषित आच्छादक समाकारिता  $f$ , तुल्यकारिता होती है  $\Leftrightarrow \ker(f) = \{e\}$ .

**PART-C**

( खण्ड-स )

**UNIT-I**

(इकाई-I)

12. Find the Eigen values and corresponding Eigen vectors of the matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स A के अभिलक्षणिक मूलों एवं उनके संगत सदिशों को ज्ञात कीजिये :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

**UNIT-II**

(इकाई-II)

13. Solve the following equation by Ferrari's Method

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 0.$$

निम्न समीकरण को फैरारी विधि से हल कीजिये :

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 0.$$

### UNIT-III

#### (इकाई-III)

14. If  $\sigma = (1\ 7\ 2\ 6\ 3\ 5\ 8\ 4)$  and

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

then Prove that

$$\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(1)\rho(7)\rho(2)\rho(6)\rho(3)\rho(5)\rho(8)\rho(4))$$

सिद्ध कीजिये

$$\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(1)\rho(7)\rho(2)\rho(6)\rho(3)\rho(5)\rho(8)\rho(4))$$

जहाँ  $\sigma = (1\ 7\ 2\ 6\ 3\ 5\ 8\ 4)$  और

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

### UNIT-IV

#### (इकाई-IV)

15. Prove that a subgroup  $H$  of a group  $G$  is a normal subgroup iff :  $H\Delta G \Leftrightarrow xHx^{-1} = H ; \forall x \in G$

सिद्ध कीजिये किसी समूह  $G$  का कोई उपसमूह  $H$  एक प्रसामान्य उपसमूह होता है यदि :

$$H\Delta G \Leftrightarrow xHx^{-1} = H ; \forall x \in G$$

### UNIT-V

#### (इकाई-V)

16. State and Prove Cayley theorem.

कैली प्रमेय को उल्लेख एवं सिद्ध कीजिये।