

# 1143-Arts

First Year Arts Examination, 2018

## MATHEMATICS

Paper – III

(Geometry)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 65

PART-A

[Marks : 20]

(खण्ड-अ)

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART-B

[Marks : 25]

(खण्ड-ब)

Answer *five* questions (250 words each). Select *one* question from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART-C

[Marks : 20]

(खण्ड-स)

Answer any *two* questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से

अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

## PART-A

### ( खण्ड-अ )

## UNIT-I

### (इकाई-I)

1. (i) Find the eccentricity and the length of latus rectum of the ellipse  $25x^2 + 4y^2 = 100$ .

दीर्घ वृत्त  $25x^2 + 4y^2 = 100$  की उत्केन्द्रता एवं नाभिलम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

- (ii) Define conjugate diameters of the ellipse.

दीर्घ वृत्त के संयुग्मी व्यास को परिभाषित कीजिए।

## UNIT-II

### (इकाई-II)

- (iii) Define rectangular hyperbola.

आयतीय अतिपरवलय परिभाषित कीजिए।

- (iv) Write the formula for the area of a triangle in polar coordinates.

ध्रुवीय निर्देशांक में त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र लिखिए।

## UNIT-III

### (इकाई-III)

- (v) Write the formula for the shortest distance between two lines.

दो रेखाओं के बीच लघुत्तम दूरी ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।

- (vi) Write the condition for two lines to be coplanar.

दो रेखाओं के समतलीय होने का प्रतिबन्ध लिखिए।

## UNIT-IV

### (इकाई-IV)

- (vii) Write the centre and the radius of the sphere.

गोले का केन्द्र एवं त्रिज्या लिखिए।

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 5y + 6z - 11 = 0.$$

- (viii) Write the condition for the orthogonality of two spheres.

दो गोलों के लम्बकोणीय काटने का प्रतिबन्ध लिखिए।

## UNIT-V

### (इकाई-V)

- (ix) Define polar plane of a conicoid.

शांकवज के ध्रुवीय तल की परिभाषा लिखिए।

(x) Define conjugate semi-diameters of the ellipsoid.

दीर्घवृत्त के संयुग्मी अर्धव्यास की परिभाषा लिखिए।

## PART-B

(खण्ड-ब)

## UNIT-I

(इकाई-I)

2. Prove that the line  $lx + my + nz = 0$  is a normal to the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  if  $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$ .

सिद्ध कीजिए कि रेखा  $lx + my + nz = 0$  दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  के लिए अभिलम्ब होगी यदि  $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$ .

3. Prove that the locus of the poles of the line joining the extremities of two conjugate semi-diameters of the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  is  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$ .

सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  के अर्धसंयुग्मी व्यासों के सिरों को मिलाने वाली जीवा के ध्रुवों का बिन्दुपथ  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$  होगा।

## UNIT-II

### (इकाई-II)

4. Prove that the locus of the poles of the chords of the hyperbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  which subtend a right angle at the centre is  $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$ .

सिद्ध कीजिए कि अति परवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  की उन जीवाओं के ध्रुवों का बिन्दुपथ, जो केन्द्र पर समकोण अन्तरित करती है, होगा  $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$ .

5. Prove that the normal to the rectangular hyperbola  $xy = c^2$  at the point ' $t_1$ ' meets the curve again at the point ' $t_2$ ' such that  $t_1^3 t_2 = -1$ .

यदि आयताकार अतिपरवलय  $xy = c^2$  के बिन्दु ' $t_1$ ' पर अभिलम्ब वक्र को पुनः ' $t_2$ ' पर काटता है तो सिद्ध कीजिए कि  $t_1^3 t_2 = -1$ .

## UNIT-III

### (इकाई-III)

6. Find the equation of the plane that bisects the segment joining the points (1, 2, 3) and (3, 4, 5) at right angle.

बिन्दुओं (1, 2, 3) व (3, 4, 5) को मिलाने वाली रेखा-खण्ड के लम्बवत् तथा इसके मध्यबिन्दु से गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

7. From the point P(1, 2, 3), PN is drawn perpendicular to the straight line  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ . Find the coordinate of N and equation of PN.

बिन्दु P(1, 2, 3) से रेखा  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$  पर PN लम्ब डाला गया है। बिन्दु N का निर्देशांक तथा रेखा PN का समीकरण ज्ञात कीजिए।

## UNIT-IV

### (इकाई-IV)

8. Find the equation of the cone whose vertex is  $(\alpha, \beta, \gamma)$

and the guiding curve is  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ .

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष  $(\alpha, \beta, \gamma)$

तथा निर्देशक वक्र  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$  है।

9. Find the equation of the right circular cylinder

whose axis is  $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$  and which passes through  $(0, 0, 1)$ .

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अक्ष

$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$  है तथा जो बिन्दु  $(0, 0, 1)$  से गुजरता है।

## UNIT-V

### (इकाई-V)

10. A tangent plane to the ellipsoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  meets the coordinate axes in A, B, C respectively. Prove that the locus of the centroid of the triangle ABC is

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9.$$

दीर्घ वृत्तज  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  का कोई स्पर्श तल अक्षों को क्रमशः बिन्दुओं A, B, C पर काटता है। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज ABC के केन्द्रक का बिन्दुपथ है

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9.$$

11. The section of the enveloping cone of the ellipsoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  whose vertex is P, by the plane  $z = 0$  is a rectangular hyperbola. Find the locus of P.

दीर्घ वृत्तज  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  के शीर्ष P वाले अन्वालोपी शंकु का तल  $z = 0$  से परिच्छेद आयतीय अतिपरवलय है तो P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

## PART-C

( खण्ड-स )

### UNIT-I

(इकाई-I)

12. Trace the conic :

शांकव का अनुरेखण कीजिए :

$$x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0.$$

### UNIT-II

(इकाई-II)

13. A circle passing through the focus of a conic whose latus rectum is  $2l$ , meets the conic in four points whose distances from the focus are  $r_1, r_2, r_3$  and  $r_4$  respectively then prove that :

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{2}{l}.$$

एक वृत्त किसी शांकव की नाभि से गुजरता है जिसकी नाभिलम्ब  $2l$  है तथा शांकव को चार बिन्दुओं पर मिलता है जिसकी नाभि से दूरियाँ क्रमशः  $r_1, r_2, r_3$  तथा  $r_4$  हैं तो सिद्ध कीजिए :

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{2}{l}.$$

## UNIT-III

### (इकाई-III)

14. Find the shortest distance between the lines :  
निम्न रेखाओं के बीच लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए :

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}; \quad \frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}.$$

## UNIT-IV

### (इकाई-IV)

15. Find the equation of the sphere which touches the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 1 = 0$  at  $(1, 2, -2)$  and passes through the point  $(1, -1, 0)$ .

बिन्दु  $(1, -1, 0)$  से गुजरने वाले उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि गोले  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 1 = 0$  को बिन्दु  $(1, 2, -2)$  पर स्पर्श करता है।

## UNIT-V

### (इकाई-V)

16. Prove that the sum of the squares of the reciprocals of three mutually perpendicular semi-diameters of an ellipsoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  is constant.

सिद्ध कीजिए कि दीर्घ वृत्तज  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  के किन्हीं तीन परस्पर लम्बवत् अर्धव्यास के व्युत्क्रमों के वर्गों का योगफल अचर होता है।