

2141/Arts
Second Year Arts Examination, 2018

MATHEMATICS

Paper-I

(Advanced Calculus)

Time allowed : Three Hours

Maximum Marks : 70

PART - A (खण्ड-अ) [Marks : 20

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पचास शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - B (खण्ड-ब) [Marks : 30

Answer *five* questions (250 words each).

Selecting *one* from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - C (खण्ड-स) [Marks : 20

Answer any *two* questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART - A

(खण्ड-अ)

UNIT - I

(इकाई-I)

1. (i) Write Darboux intermediate value theorem of derivatives.

अवकलजों के लिए डारबो मध्यवर्ती मान प्रमेय लिखिये।

- (ii) What is Heine's definition continuity ?

सांतत्यता की हेनी परिभाषा क्या है?

UNIT - II

(इकाई-II)

- (iii) What do you mean by envelope ?

अन्वालोप से आप क्या समझते हैं?

- (iv) State Euler's theorem.

आयलर प्रमेय लिखिये।

UNIT - III

(इकाई-III)

- (v) Write Liouville's extension of Dirichlet's integral.

डिरिचलिट समाकलन का लिवेली व्यापकीकरण लिखिये।

- (vi) Write formula for change of double integral from cartesian to polar.

कार्तीय द्विसमाकलन का ध्रुवी निर्देशांकों में परिवर्तन का सूत्र लिखिये।

UNIT - IV

(इकाई-IV)

- (vii) What is Jacobian ?

जेकोबियन क्या है?

(viii) Define the vector differential operator.

सदिश अवकल संकारक परिभाषित कीजिये।

UNIT - V

(इकाई-V)

(ix) Write Gauss's divergence theorem.

गॉस का अपसरण प्रमेय लिखिये।

(x) Write Stoke's theorem.

स्टॉक प्रमेय लिखिये।

PART - B

(खण्ड-ब)

UNIT - I

(इकाई-I)

2. Examine for continuity the function of definal by

$$f(x) = |x| + |x - 1| \text{ at } x = 0 \text{ and } x = 1.$$

फलन $f(x) = |x| + |x - 1|$ की $x = 0$ तथा $x = 1$ पर सांतत्यता की जाँच कीजिये।

3. Prove that following function f is continuous but non-differentiable at $x = 0$.

सिद्ध करो कि निम्न फलन $x = 0$ पर संतत किन्तु अवकलनीय नहीं है।

$$f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

UNIT - II

(इकाई-II)

4. Find the envelope of the family of following curve where α is a parameters :

निम्न वक्र के कुल का अन्वालोप ज्ञात करो, जहाँ α प्राचल है।

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{k^2\alpha^2} = 1$$

5. Find maximum value of

उच्चतम मान ज्ञात करो :

$$f = \sin x \sin y \sin(x + y)$$

UNIT - III

(इकाई-III)

6. Change the order of integration in the following double integration :

निम्न द्विसमाकलन में समाकलन का क्रम बदलिये :

$$\int_0^{\alpha \cos \alpha} \int_{x \tan \alpha}^{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) dx dy$$

7. Evaluate :

मान ज्ञात करो :

$$\int_0^{\log^2} \int_0^x \int_0^{x+\log y} e^{x+y+z} dx dy dz$$

UNIT - IV

(इकाई-IV)

8. If $u^3 + v^3 = x + y$ and $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$ then find the value

of $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

यदि $u^3 + v^3 = x + y$ तथा $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$ तो $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ का मान ज्ञात करो।

9. If $V = \nabla(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ find following

- (a) $\text{div } V$
- (b) $\text{curl } V$

यदि $V = \nabla(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ तो निम्न का मान ज्ञात करो :

- (a) $\text{div } V$
- (b) $\text{curl } V$

UNIT - V

(इकाई-V)

10. What do you mean by Green's theorem, evaluate following by it.

$$\int_C (e^{-x} \sin y \, dx + e^{-x} \cos y \, dy)$$

where C is rectangle with vertices $(\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, \frac{\pi}{2})$ & $(0, \frac{\pi}{2})$.

ग्रीन प्रमेय से आप क्या समझते हैं? निम्न का मान इसकी सहायता से ज्ञात करो, जहाँ C एक आयत है जिसके शिर्ष $(\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, \frac{\pi}{2})$ व $(0, \frac{\pi}{2})$ हैं, $\int_C (e^{-x} \sin y dx + e^{-x} \cos y dy)$.

11. Evaluate $\int_S (\nabla \times F) \cdot \hat{n} ds$

where

$$F = (x^2 + z^2 - x^2)i + (z^2 + x^2 - y^2)j + (x^2 + y^2 - z^2)k$$

S is the portion of surface $x^2 + y^2 - 2ax + az = 0$ above the plane $z = 0$.

मान ज्ञात कीजिए $\int_S (\nabla \times F) \cdot \hat{n} ds$ जहाँ

$$F = (x^2 + z^2 - x^2)i + (z^2 + x^2 - y^2)j + (x^2 + y^2 - z^2)k$$

S, पृष्ठ $x^2 + y^2 - 2ax + az = 0$ का वह भाग है जो तल $z = 0$ के ऊपर है।

PART - C

(खण्ड-स)

UNIT - I

(इकाई-I)

12. State and prove Mostest theorem.

मोस्टेस्ट लिखकर सिद्ध करो।

UNIT - II

(इकाई-II)

13. Solve following with the help of Euler's theorem.

आयलर प्रमेय की सहायता से निम्न को हल करो :

(i) If $f = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right)$ find $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$.

यदि $f = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right)$ तो $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ ज्ञात करो।

(ii) If $u = \tan^{-1} \left(\frac{x^3 + y^3}{x + y} \right)$ find $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$.

यदि $u = \tan^{-1} \left(\frac{x^3 + y^3}{x + y} \right)$ तो $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ ज्ञात करो।

UNIT - III

(इकाई-III)

14. Find the volume and surface area of the solid generated by the revolution of the cardioid $r = a(1 + \cos\theta)$ about initial line.

कार्डियोइड $r = a(1 + \cos\theta)$ के आरम्भिक रेखा के परितः परिक्रमण से जनित घनाकृति का आयतन व पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करो।

UNIT - IV

(इकाई-IV)

15. Prove following :

निम्न को सिद्ध करो :

$$(i) \quad \nabla \cdot (a \times b) = b \cdot (\nabla \times a) - a \cdot (\nabla \times b)$$

$$(ii) \quad \text{curl} (a \times b) = (b \cdot \nabla) a - b \text{ div } a - (a \cdot \nabla) b + a \text{ div } b$$

UNIT - V

(इकाई-V)

16. Verify Gauss's divergence theorem and show that

$$\int_S F \cdot \hat{n} \, ds = \frac{a^3}{3}$$

where $F = (x^3 - yz)i - 2x^2y j + 2k$ S is the surface of the cube bounded by the co-ordinate planes :

$$x = y = z = 0, x = y = z = a$$

गॉस प्रमेय को सत्यापित करते हुए दर्शाइये कि $\int_S F \cdot \hat{n} \, ds = \frac{a^3}{3}$ जहाँ

$F = (x^3 - yz)i - 2x^2y j + 2k$ S निम्न निर्देशांक समतलों द्वारा परिबद्ध घन का पृष्ठ है $x = y = z = 0, x = y = z = a$.