

**2143/Arts**  
**Second Year Arts Examination, 2018**

**MATHEMATICS**

**Paper-III**

**(Mechanics)**

**Time allowed : Three Hours**

**Maximum Marks : 65**

**PART - A ( खण्ड-अ ) [Marks : 20**

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पचास शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART - B ( खण्ड-ब ) [Marks : 25**

Answer *five* questions (250 words each).

Selecting *one* from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART - C ( खण्ड-स ) [Marks : 20**

Answer any *two* questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART - A**

( खण्ड-अ )

**UNIT - I**

( इकाई-I )

1. ( i ) State m-n theorem for the equilibrium of three forces acting on a rigid body.

एक पिण्ड पर लगे तीन बलों के अन्तर्गत साम्यावस्था के लिये m-n प्रमेय लिखिये।

- ( ii ) Define coefficient of friction.

घर्षण गुणांक को परिभाषित कीजिये।

**UNIT - II**

( इकाई-II )

- ( iii ) Define virtual work.

कल्पित कार्य को परिभाषित कीजिये।

- ( iv ) Write the equation of trajectory.

प्रक्षेप पथ का समीकरण लिखिये।

### UNIT - III

#### ( इकाई-III )

- ( v ) Define tangential and normal velocities.

स्पर्श रेखीय तथा अभिलाम्बिक वेग को परिभाषित कीजिये।

- ( vi ) Define Hook's law for elastic strings.

प्रत्यास्थ डोरियों के लिये हुक का नियम लिखिये।

### UNIT - IV

#### ( इकाई-IV )

- ( vii ) Define terminal velocity of a particle.

किसी कण के अन्तिम वेग को परिभाषित कीजिये।

- ( viii ) Write the equation of the parabolic path of a particle projected from the lowest point of a smooth verticle circle.

उस परवलीय पथ का समीकरण लिखिये जब एक कण किसी चिकने उर्ध्वाधर वृत्त के सबसे नीचे के बिन्दु से फेंका जाता है।

### UNIT - V

#### ( इकाई-V )

- ( ix ) Define effective surface of a liquid.

किसी द्रव के प्रभावी पृष्ठ को परिभाषित कीजिये।

( x ) Write the centre of pressure of a homogeneous liquid of density  $\rho$ .

$\rho$  घनत्व वाले समांगी द्रव के दाब केन्द्र के निर्देशांक लिखिये।

**PART - B**

( खण्ड-ब )

**UNIT - I**

( इकाई-I )

2. A ladder whose centre of gravity divides it into two portions of length  $a$  and  $b$ , rest with one end on a rough horizontal floor and the other end against a rough vertical wall. If the coefficient of friction at the floor and wall be  $u$  and  $u'$  resp. Show the inclination of the ladder to the floor when equilibrium is limiting

$$\text{is } \tan^{-1} \left\{ \frac{a - bu u'}{u(a + b)} \right\}.$$

एक सीढ़ी का गुरुत्व केन्द्र इसे दो भागों  $a$  और  $b$  में बाँटता है सीढ़ी का एक सिरा रूक्ष क्षैतिज फर्श पर तथा दूसरा रूक्ष, उर्ध्वाधर दीवार पर टिका है। यदि फर्श तथा दीवार के घर्षण गुणांक क्रमशः  $u$  तथा  $u'$  हों तो प्रदर्शित कीजिये कि सीमान्त संतुलन में सीढ़ी का फर्श से झुकाव होगा

$$\tan^{-1} \left\{ \frac{a - bu u'}{u(a + b)} \right\}.$$

3. Show that the length of an endless chain which will hang over a circular pulley of radius  $a$  so as to be in contact with two thirds of the circumference of the pulley is

$$a \left[ \frac{4\pi}{3} + \frac{3}{\log(2 + \sqrt{3})} \right].$$

प्रदर्शित कीजिये कि एक अन्तहीन जंजीर जो त्रिज्या  $a$  की एक वृत्ताकार घिरनी के  $\frac{2}{3}$  परिधि से सम्पर्क में है उसकी लम्बाई होगी :

$$a \left[ \frac{4\pi}{3} + \frac{3}{\log(2 + \sqrt{3})} \right]$$

## UNIT - II

### ( इकाई-II )

4. Two bodies are projected from the same point with the same velocity but in different direction. If the range in each case be  $R$  and the times of flight be  $t$  and  $t'$  prove that  $R = \frac{1}{2} g t t'$ .  
दो पिण्ड एक ही बिन्दु से समान वेग से दो विभिन्न कोणों पर फेंके जाते हैं। यदि दोनों का एक ही परास  $R$  हो और उड़डयन काल  $t$  और  $t'$  हों तो सिद्ध कीजिये कि  $R = \frac{1}{2} g t t'$ .

5. A heavy elastic ball drops from the ceiling of a room and after rebounding twice the floor reaches a height equal to one half that of the ceiling. Prove that the coefficient of restitution is

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

एक प्रत्यास्थ गेंद कमरे की छत से गिरती है और दो बार फर्श से प्रक्षिप्त होकर छत की आधी ऊँचाई तक पहुँचती है तो सिद्ध कीजिये कि प्रत्यानयन

गुणांक  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$  है।

### UNIT - III

#### ( इकाई-III )

6. A particle describes an equiangular spiral  $r = ae^{\theta}$  with constant angular velocity. Show that its :
- radial acceleration is zero
  - transverse acceleration varies as its distance from the pole.

एक कण समानकोणिक सर्पिल  $r = ae^{\theta}$  में गमन करता है। यदि इसका कोणीय वेग अचर हो तो सिद्ध कीजिये कि

- इसका अरीय त्वरण शून्य है तथा
- अनुप्रस्थ त्वरण इसकी ध्रुव से दूरी के समानुपाती है।

7. A particle is performing SHM of period T about a centre O and it passes through a point P distant b from O with velocity v in the direction OP Prove that the time which elapses before it returns to P is  $\frac{T}{\pi} \tan^{-1} \frac{vT}{2\pi b}$ .

यदि एक कण केन्द्र O के दोनों ओर T आवर्तकाल की SHM करें और वह किसी बिन्दु P जहाँ OP = b में से OP की दिशा में वेग v से गुजरे तो सिद्ध कीजिये वह पुनः P पर  $\frac{T}{\pi} \tan^{-1} \frac{vT}{2\pi b}$  समय के पश्चात् लौटेगा।

#### UNIT - IV

#### ( इकाई-IV )

8. A particle of mass m is falling under gravity through a medium whose resistance is u times the velocity. If the particle is released from rest show that the distance fallen through in time t is :

m संहति का एक कण गुरुत्वाकर्षण के अधीन एक ऐसे माध्यम में होकर गिरता है जिसका प्रतिरोध वेग के u गुने के बराबर है यदि कण विरामावस्था से गिराया जाये तो सिद्ध कीजिये कि t समय में तय की गई दूरी है :

$$\frac{gm^2}{u^2} \left[ e^{-\frac{ut}{m}} - 1 + \frac{ut}{m} \right]$$

9. A heavy particle slides down a smooth cycloid starting from rest at the cusp, the axis being vertical and vertex downwards. Prove that the magnitude of the acceleration of the particle is equal to  $g$  at every point of its path.

एक भारी कण किसी चक्रज (जिसकी अक्ष उध्वार्धर तथा शीर्ष निम्नतम है) के उभयाग्र से विरामावस्था में गिरता है। सिद्ध कीजिये कि कण के त्वरण का परिमाण उसके पथ के प्रत्येक बिन्दु पर  $g$  होगा।

## UNIT - V

### ( इकाई-V )

10. Three liquids whose densities are in AP. Fill a semi circular tube whose bounding diameter is horizontal. Prove that the depth of one of the common surface is double that of the other.

तीन द्रव जिनके घनत्व समान्तर श्रेढी में हैं, एक अर्धवृत्ताकार नली में भरे गये हैं जिसका सीमक व्यास क्षैतिज है। सिद्ध कीजिये कि द्रवों के उभयनिष्ठ तलों में एक की गहराई दूसरे की गहराई से दुगुनी है।



11. P is the C.P. of the rectangle ABCD, the side AB being in the surface prove that the line through A and P divides the area in two portions, the pressures on which are equal.

किसी आयत ABCD का दाब केन्द्र P है। जिसकी एक भुजा AB मुक्त पृष्ठ में है सिद्ध करो कि A और P से होकर जाने वाली रेखा क्षेत्र को ऐसे दो भागों में विभाजित करती है जिन पर प्रणोद बराबर है।

**PART - C**

**( खण्ड-स )**

**UNIT - I**

**( इकाई-1 )**

12. A uniform string of weight W is suspended from two points at the same level and a weight W' is attached to its lowest point. If  $\alpha$  and  $\beta$  be now the inclinations to the horizontal of the tangents at the highest and lowest points. Prove that

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = 1 + \frac{W}{W'}$$

W भार की एक एक समान रस्सी समान स्तर के दो बिन्दुओं के मध्य लटकी हुई है जिसके निम्नतम बिन्दु पर एक भार W' लगा रखा है। यदि उच्च एवं निम्न बिन्दु पर स्पर्श रेखायें क्षैतिज से झुकाव कोण  $\alpha$  तथा  $\beta$  हों

तो सिद्ध कीजिये कि  $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = 1 + \frac{W}{W'}$ .

## UNIT - II

### ( इकाई-II )

13. A ball moving with velocity  $u$ , impings directly on an equal ball B, moving with velocity  $v$  in the opposite direction. If  $e$  is the coefficient of restitution and A be brought to rest after impact prove that.

$u$  वेग से जाती हुई एक गेंद A विपरीत दिशा में वेग  $v$  से आती हुई दूसरी बराबर की गेंद B से सीधा संघट्ट करती है। यदि प्रत्यानयन गुणांक  $e$  हो और संघट्ट के बाद गेंद A विरामावस्था में आ जाये तो सिद्ध कीजिये :

$$u : v = (1 + e) : (1 - e)$$

## UNIT - III

### ( इकाई-III )

14. A particle moves from rest at a distance  $a$  from a point O under the action of a force towards O equal to  $u$  times the distance per unit of mass if the resistance of the medium in which it moves be  $k$  times the square of the velocity per unit mass show that the square of the velocity, when it is at a distance  $x$  from O is :

एक कण बिन्दु O से a दूरी से विरामावस्था से O की ओर एक बल के अधीन गतिमान है जो प्रति इकाई द्रव्यमान की दूरी का u गुणा है। यदि माध्यम का प्रतिरोध वेग प्रति इकाई द्रव्यमान के वर्ग का k गुणा हो तो सिद्ध कीजिये कि O से x दूरी पर वेग का वर्ग है :

$$\frac{ux}{k} - \frac{ua}{k} e^{2k(x-a)} + \frac{u}{2k^2} [1 - e^{2k(x-a)}]$$

Also show that when it first comes to rest it will be at a distance b is given by

यह भी दिखलाइये कि जब यह प्रथम बार विरामावस्था में आता है तब यह दूरी b निम्न से प्राप्त होती है :

$$(1 - 2bk)e^{2bk} = (1 + 2ak)e^{-2ak}$$

#### UNIT - IV

#### ( इकाई-IV )

15. A particle of mass m executes SHM in line joining two points A and B on a smooth table and is connected with these points by elastic strings whose tensions in equilibrium are each T. Show that the time of an oscillation is  $2\pi \sqrt{\frac{ml'}{T(l+l')}}$  where l, l' are extensions of the strings beyond their natural lengths.

m द्रव्यमान का एक कण, एक चिकने मेज पर स्थित दो बिन्दुओं A तथा B को मिलाने वाली रेखा पर SHM से गतिमान है और वह इन बिन्दुओं से प्रत्यास्थ डोरियों द्वारा बंधा हुआ है। जिसका प्रत्येक का तनाव संतुलन की दशा में T है। सिद्ध कीजिये कि दोलन का समय  $2\pi\sqrt{\frac{ml'}{T(l+l')}}$  है जबकि l, l' स्वाभाविक लम्बाई के अतिरिक्त डोरियों में विस्तार है।

## UNIT - V

### ( इकाई-V )

16. An ellipse is completely immersed with its minor axis horizontally and at a depth h. Find the position of its C.P.

एक दीर्घवृत्त किसी द्रव में पूर्णतः इस प्रकार निमज्जित है कि इसका लघु अक्ष क्षैतिज और h गहराई पर है। दाब केन्द्र की स्थिति ज्ञात करो।